This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06644362 7

4/20/46

Die Prinzipien

der

Hydrostatik und Hydraulik.

1

Von

H. Scheffler.

Erster Band.

Mit über 300 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1847.

Sib.

TO NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
246117A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1926 L

Die

Herzoglich Braunſchweig-Lüneburgiſche

Bau-Direktion,

unter Deren hohen Auſpizien ich das Glück hatte, meinen Eintritt in das Gebiet der Technik überwacht und geleitet und meine Beſtrebungen nach Erkenntniß der in der Technik lebenden wiſſenſchaftlichen Wahrheit auf ein edeles Ziel gelenkt zu ſehen, wolle in der ehrfurchtsvollen Dedikation dieſer Schrift hochgeneigteſt den Dank genehmigen, zu welchem das bisherige Wohlwollen des hohen Kollegiums auf immer verpflichtet

den Verfaſſer.

Vorrede.

Nachdem durch die fleißigen Beobachtungen neuerer Experimentatoren manche öde Stelle im Felde der praktiſchen Hydraulik urbar gemacht iſt, und die Keime zu einer ſpäteren reichhaltigeren Ernte gelegt ſind, möchte es zeitgemäß erſcheinen, das erweiterte Feld dieſer Wiſſenſchaft in ihrem heutigen Zuſtande nochmals am Stabe der theoretiſchen Betrachtung zu durchwandern, um hie und da zerſtreuetes Unkraut auszurotten und an anderen Orten Stützen aufzurichten oder zu befeſtigen, an denen die grünende Saat ſicherer emporzuranken vermag.

In den nachfolgenden Prinzipien der Hydroſtatik und Hydraulik wolle der geneigte Leſer einen Verſuch dieſer Art freundlichſt entgegennehmen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß in einer ſolchen Arbeit, deren verſchiedenen Zweigen ſeit Jahrtauſenden die größten Talente ihre Kräfte gewidmet haben, nicht Alles neu ſein kann. Eine Wahrheit, welche aus richtigen Vorausſetzungen gefloſſen iſt,

wird ewig dieſelbe bleiben, und kann höchſtens in einer anderen Form reproduzirt werden. Irrthümer dagegen, welchen der Mangel einer unhaltbaren Hypotheſe im Ausgangspunkte anhaftet, obgleich ſie ſonſt bei ihrer folgerichtigen Entwickelung den Schein des Wahren angenommen haben, dürfen in überwiegender Zahl in einer Wiſſenſchaft des neunzehnten Jahrhunderts ebenfalls nicht erwartet werden, um ihrer Widerlegung entgegenzuharren. Die neuen Entdeckungen in den verſchiedenen Abtheilungen dieſes Gebietes endlich, obgleich dasſelbe bei weitem noch nicht erſchöpft iſt, können doch nur vereinzelt ans Licht treten, nachdem ſo langjährige Forſchungen vorangegangen ſind; es bleibt in dieſer Beziehung nicht viel mehr übrig, als die zerſtreueten Reſultate der theoretiſchen und praktiſchen Unterſuchungen auf Einem Punkte zu konzentriren.

Das Vorſtehende möchte bei der Beurtheilung der gegenwärtigen Schrift nicht ohne Berückſichtigung bleiben dürfen. Dabei iſt der Maaßſtab für den Werth des Buches noch den Motiven zu akkommodiren, unter welchen dasſelbe verfaßt worden iſt.

In dieſer Hinſicht habe ich zu bemerken, daß es vorzugsweiſe das Bedürfniß meiner Kameraden, der Techniker, war, welches ich bei der Ausarbeitung der nachfolgenden Abhandlung ins Auge gefaßt habe.

Demzufolge konnte ich mich hauptſächlich nur auf die Erörterung derjenigen Lehren der Hydroſtatik und Hydraulik einlaſſen, welche für die Fragen des praktiſchen Lebens

den Schlüssel liefern, ohne weit in Spekulationen über rein wissenschaftliche Zweige oder in die Untersuchung von Erscheinungen abzuschweifen, welche nur für das höhere Studium der physikalischen Naturerkenntniß von Interesse sind.

Dabei habe ich jedoch keineswegs auf die Hülfe der höheren Analysis verzichtet, und mich nicht begnügt, die auf die Praxis unmittelbar Anwendung findenden Resultate auf elementarem Wege wie vereinzelt dastehende Lehrsätze ohne inneren Zusammenhang zu entwickeln. Ich glaube, daß bei dem Aufschwunge, welchen in gegenwärtiger Zeit der Bildungsgang der Technik nimmt, ein so ängstliches Vermeiden aller wahren Wissenschaftlichkeit vor einem sehr großen Theile der Techniker nicht zu rechtfertigen steht. Wer lediglich die Endresultate einer Untersuchung behuf praktischer Verwendung zu kennen wünscht, wird dieselben aus den mechanischen Hülfsbüchern und tabellarischen Zusammenstellungen ohne Weiteres entnehmen können. Wer mehr will, als Dies, wem es an der Kenntniß der mechanischen Gründe gelegen ist, welche irgend eine Erscheinung hervorrufen, der würde zwar in einem Lehrbuche, wo nur elementare Mathematik benutzt ist, für jeden speziellen Fall, sofern derselbe zu den einfacheren gehört, Aufschluß erhalten; aber gleichwol würde er weit davon entfernt bleiben, die höheren Gesetze zu durchschauen, welche allen ähnlichen Erscheinungen gemeinschaftlich zu Grunde liegen. Er würde seinem Gedächt-

niſſe nur eine Vielheit iſolirter Sätze einprägen können, von denen ein jeder in eigenthümlicher Weiſe den Zuſammenhang einer beſonderen Erſcheinung mit der nächſtliegenden Urſache anſchaulich macht. Hieraus würde aber noch kein allgemeiner Geſichtskreis gewonnen, noch kein ſicherer Wegweiſer entdeckt, welcher von den höchſten und einfachſten Prinzipien der Mechanik zu den unendlich mannichfaltigen Phänomenen der Hydroſtatik und Hydraulik führt.

Das Letztere leiſtet allein die Behandlung der hier in Rede ſtehenden Wiſſenſchaft vermittelſt des Beiſtandes der höheren Analyſis, weil ſich der Charakter dieſes Zweiges der reinen Mathematik eben in der Darſtellung allgemeinſter Geſetze ausſpricht. Wenn demnach in einem elementaren Lehrbuche der Mechanik, um dasſelbe vollſtändig zu machen, wo möglich alle denkbaren Fälle der Wirklichkeit aufgeführt und beſonders abgeleitet werden müßten; ſo braucht ein Lehrbuch, welches ſich am Leitfaden der höheren Analyſis hinzieht, nur die allgemeinſten Prinzipien und die daraus fließenden oberſten Kathegorieen von Erſcheinungen zu erörtern, um den aufmerkſamen Leſer in den Stand zu ſetzen, für jeden neuen Fall die Regel ſelbſt zu finden.

Aus ſolchen Rückſichten habe ich denn der Differenzial- und Integralrechnung in gegenwärtiger Schrift das ihr gebührende Recht eingeräumt. Im Uebrigen findet auch der mit dieſen Theilen der Mathematik weniger vertraute

Leſer in dem Finale eines jeden Satzes dasjenige Reſultat, deſſen Kenntniß für eine unmittelbare Anwendung auf die Praxis wünſchenswerth iſt.

Da das Studium eines wiſſenſchaftlichen Werkes bei ſehr vielen Leſern gewiß nicht allein in der Abſicht unternommen wird, nur die nackten Ergebniſſe einer mathematiſchen Rechnung zu erfahren, ſondern Viele auch den Zweck vor Augen haben, bei der ſchrittweiſen Erkennung der Wahrheit, bei der ſyſtematiſchen Verfolgung der hierzu führenden Konſequenzen ihren Verſtand zu bilden, ein ſolcher Zweck aber gänzlich vereitelt wird, ſobald die Deduktionen zu einer handwerksmäßigen Formelnſchmiederei ausarten, bei welcher es dem Leſer überlaſſen bleibt, mühſam die Elemente zuſammen zu tragen, welche den Ausgangspunkt und die Grundlage der Rechnung bilden, während dieſe Rechnung ſelbſt in wenig motivirten Kreuz- und Querzügen plötzlich bei einem Reſultate anhält, welches der überraſchte Lehrer für das geſuchte zu erkennen und nach Belieben auszudeuten hat; ſo wird man es gewiß gerechtfertigt finden, daß ich an vielen Stellen, namentlich, wo es auf die Feſtſtellung der Grundideen ankam, zur Erleichterung des Verſtändniſſes und zur Veranſchaulichung der leitenden Prinzipien etwas ausführlicher verfahren bin, als es für den geübteren Leſer nothwendig geweſen ſein möchte.

Im Uebrigen bin ich bei der Reihenfolge der Materien in dem der Hydraulik gewidmeten Abſchnitte größten-

theils dem Vorgange Naviers in deſſen Résumé des leçons sur l'application de la mécanique, seconde partie gefolgt, welcher bereits die Billigung verſchiedener anderer Schriftſteller gefunden hat, da derſelbe in einem natürlichen Entwickelungsgange der hierher gehörigen Erſcheinungen begründet iſt. Manches Einzelne, welches aus Naviers vortrefflichen Schriften in die gegenwärtige übergegangen iſt, würde der kundige Leſer ſelbſt dann erkennen, wenn dasſelbe auch nicht mit dem Namen dieſes ausgezeichneten Mannes eingeleitet wäre.

Braunſchweig, im Januar 1847.

Der Verfaſſer.

Inhalt des ersten Theiles.

Erster Abschnitt.

Die Prinzipien der Hydrostatik.

I. Die Fundamentalgleichungen der Hydrostatik.

§. Seite

1. 2. Allgemeine Begriffe 1

Allgemeine Beziehungen zwischen den auf eine Flüssigkeit angebrachten Kräften, dem in irgend einem Punkte der Flüssigkeit stattfindenden Drucke und den Gestalten der Flächen von gleichem Niveau.

3. Hülfssatz 5
4. Bestimmung des Druckes, welcher in irgend einer Flüssigkeit stattfindet 6
5. Fortpflanzung des Druckes durch eine Flüssigkeit, und allgemeine Bedingungen für die Natur der Kräfte, welche eine Flüssigkeit im Gleichgewichte zu erhalten vermögen 12
6. Bestimmung der Richtungslinie der sollizitirenden Kraft und der Flächen von gleichem Niveau in einer Flüssigkeit 18
7. Dichtigkeit einer Flüssigkeit in den verschiedenen Flächen von gleichem Niveau 23
8. Einfluß der Temperatur auf den Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit 25

II. Das Gleichgewicht der schweren unpreßbaren Flüssigkeiten.

Beziehungen zwischen den auf eine unpreßbare Flüssigkeit wirkenden Kräften, den inneren Pressungen und den Flächen von gleichem Niveau.

9. Bestimmung des Druckes in irgend einem Punkte einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit 26
10. Die Flächen von gleichem Niveau in einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit 28
11. Fall, wo die Flüssigkeit eine nicht zusammenhängende freie Oberfläche bildet, auf deren getrennte Theile verschiedene äußere Druckkräfte wirken 29
12. Fall, wo sich in demselben Gefäße mehrere unpreßbare Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten befinden 32

Bestimmung des Druckes einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit gegen gegebene Theile der Gefäßwände.

13. 14. Größe des Druckes auf ein bestimmtes Stück einer Fläche, gegen welche sich die Flüssigkeit stützt 36

§. Seite
15. Richtung des Druckes einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit gegen ein bestimmtes Stück irgend einer Fläche 41
16. Druck gegen einen bestimmten Theil der Gefäßwand, wenn dabei der atmosphärische Druck auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit berücksichtigt wird 45
17. Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit gegen irgend eine ebene Figur. — Mittelpunkt des Druckes 47
18. Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit auf ein vertikales Rechteck 51
19. Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit auf ein vertikales Dreieck mit horizontaler Basis 52
20. Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit auf einen vertikalen Kreis 55
21. Die vorstehenden Resultate der §§. 13 bis 20 beziehen sich nicht bloß auf den Fall, wo die mit der Flüssigkeit in Berührung befindliche Fläche absolut glatt ist, sondern auch auf den, wo dieselbe die unvollkommen geglättete Oberfläche eines physischen Körpers bildet 57

Gleichgewicht der auf der Oberfläche schwerer unpreßbarer Flüssigkeiten schwimmenden Körper.

22. Allgemeine Bedingungen des Schwimmens 59
23. Verhalten der in unpreßbare Flüssigkeiten getauchten Körper unter besonderen Umständen 63
24. Tiefe der Einsenkung eines an der Oberfläche einer unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers 64
25. Tiefe der Einsenkung eines nach Art der Pontons gebaueten Körpers 66
26. Tiefe der Einsenkung eines der Länge nach auf der Flüssigkeit schwimmenden Zylinders 69
27. Tiefe der Einsenkung einer Kugel 70
28. Senkung eines schwimmenden Körpers in Beziehung zu dem Gefäße, in welchem die Flüssigkeit enthalten ist 71
29. Fall, wo sowol das Gefäß, wie der schwimmende Körper gerade und vertikal stehende Prismen sind 74
30. Fall, wo sowol das Gefäß, wie der schwimmende Körper ein vertikal stehendes Umwälzungsparaboloid bildet 75
31. Bestimmung der Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Körpers . . 77
32. Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Körpers, welcher sich unten in ein gerades dreiseitiges Prisma endigt, wenn nur Eine Kante unter den Spiegel der Flüssigkeit getaucht ist 82
33. Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Körpers, welcher sich unten in ein gerades Prisma mit gleichschenkligem dreieckigen Querschnitte endigt, wenn die Basis dieses gleichschenkligen Dreiecks mit den beiden anliegenden Ecken unter den Spiegel der Flüssigkeit getaucht ist 86

Stabilität schwimmender Körper.

34. Allgemeine Bedingungen für die Stabilität eines schwimmenden Körpers. — Metazentrum 91
35. Bewegungen eines aus seiner Gleichgewichtslage gebrachten schwimmenden Körpers 94
36. Stabilität eines schwimmenden parallelepipedischen Körpers 104
37. Stabilität einer schwimmenden Kugel 108

III. Das Gleichgewicht einer mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine Axe rotirenden, der Gravitation unterworfenen unpreßbaren Flüssigkeit.

§. Seite
38. Gestalten der freien Oberfläche und der Flächen von gleichem Niveau 110
39. Bestimmung des in irgend einem Punkte der obigen Flüssigkeit herrschenden Druckes 113

IV. Das Gleichgewicht der schweren elastischen Flüssigkeiten.

Beziehungen zwischen den auf eine elastische Flüssigkeit wirkenden Kräften, den inneren Pressungen und den Flächen von gleichem Niveau.

40. Allgemeine Beziehung zwischen dem Volum einer gegebenen Quantität einer elastischen Flüssigkeit und der in derselben herrschenden Spannung. — Mariottesches Gesetz 117
41. Allgemeine Beziehung zwischen dem Volum einer gegebenen Quantität einer elastischen Flüssigkeit von bestimmter Spannung und der darin herrschenden Temperatur. — Gay-Lussacsches Gesetz . . 121
42. Beziehung zwischen dem Volum, der Dichtigkeit, der Spannung und der Temperatur einer elastischen Flüssigkeit 122
43. Bestimmung des Druckes in irgend einem Punkte einer schweren elastischen Flüssigkeit 126
44. Bestimmung des Druckes in irgend einem Punkte eines Gemisches von mehreren schweren elastischen Flüssigkeiten 130

Gleichgewicht einer atmosphärischen Luftsäule. — Barometermessungen.

45. Allgemeine Gleichung für den in einem Punkte der atmosphärischen Luft stattfindenden Druck 131
46. Veränderlichkeit der Schwere 132
47. Veränderlichkeit der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft mit dem Drucke, der Temperatur und dem Gehalte an Wasserdampf 133
48. Gleichung für den in einem Punkte der atmosphärischen Luft herrschenden Druck 134
49. Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Örter mit Hülfe des Barometers 137
50. Beispiele 141
51. Korrektion bei Ablesung der Barometerstände wegen der Ausdehnbarkeit der Skale und der Depression der Queckſilbersäule . . . 142
52. Praktische Regeln für das bei den barometrischen Höhenmessungen zu beobachtende Verfahren 144

Zweiter Abschnitt.

Die Prinzipien der Hydraulik.

I. Die Fundamentalgleichungen der Hydraulik.

53. Gegenstand der Hydraulik 147
54. Kurze Wiederholung einiger wichtigen Lehrsätze der Mechanik . . . 147

§. Seite
55. Allgemeine Gleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit in einem röhrenförmigen Gefäße 157
56. Bestimmung des hydraulischen Druckes einer in einer Röhre sich bewegenden Flüssigkeit in irgend einem Punkte 172

II. Die Bewegung der schweren unpreßbaren Flüssigkeiten.

57. Transformation der allgemeinen Gleichungen (234) und (235) für den Fall, daß die in einer engen Röhre sich bewegende Flüssigkeit schwer und unpreßbar sei 175

Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einer Röhre, deren Querschnitte sich nur allmählig ändern.

58. Allgemeine Gleichungen für diesen Fall, wenn sich eine bestimmte Quantitat der Flüssigkeit in einer Röhre fortbewegt, ohne aus der Röhre herauszufließen 179
59. Fall, wo der Querschnitt der Röhre in allen Punkten konstant ist . 180
60. Fall, wo bei konstantem Querschnitte der Röhre die Axe derselben eine gerade Linie ist 181
61. Bewegung einer Flüssigkeit in einer Röhre, wenn der obere Spiegel stets auf konstanter Höhe erhalten wird, und die Flüssigkeit sich in der Röhre fortbewegt, ohne aus derselben herauszufließen 182
62. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer Röhre, wenn der obere Spiegel auf konstanter Höhe erhalten wird 183
63. Fall, wo der obere Querschnitt der Röhre kleiner, als die Ausflußöffnung ist 185
64. Fall, wo der obere Querschnitt der Röhre der Ausflußöffnung gleich ist 185
65. Fall, wo der obere Querschnitt der Röhre größer, als die Ausflußöffnung ist 186
66. Beharrungszustand einer aus einer Röhre sich ergießenden Flüssigkeit . 188
67. Beharrungszustand einer aus einer Röhre sich ergießenden Flüssigkeit unter der Bedingung, daß in jeder Zeiteinheit eine bestimmte Quantität der Flüssigkeit in die Röhre geführt werde 197
68. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer Röhre, wenn der obere Spiegel allmählig herabsinkt 198
69. Besonderer Fall, wo die Ausflußöffnung ungemein klein ist gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre, und wo die Letztere ein vertikal stehendes prismatisches Gefäß bildet 199
70. Fall, wo die Form der vertikal stehenden Röhre die Bedingung erfüllen soll, daß sich beim Ausflusse der Flüssigkeit der obere Spiegel in gleichen Zeiten um gleich viel herabsenke 202

Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem Gefäße von beliebiger Gestalt, dessen Querschnitte sich nur allmählig ändern.

71. Bewegung einer solchen Flüssigkeit in einem Gefäße mit vertikaler Axe, dessen Ausflußöffnung sich nach innen dergestalt erweitert, daß alle Theilchen der Flüssigkeit parallel zur Axe austreten können 203

§. Seite

72. Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem Gefäße von beliebiger Gestalt, dessen Querschnitte sich allmählig ändern, und dessen Ausflußöffnung nach innen dergestalt erweitert ist, daß alle Theilchen der Flüssigkeit parallel zur Normalen auf dieser Öffnung auftreten können 204

73. Beharrungszustand einer aus einem beständig voll erhaltenen Gefäße von beliebiger Form und den oben erwähnten Eigenschaften sich ergießenden Flüssigkeit 205

74. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße von beliebiger Gestalt, wenn der obere Spiegel allmählig herabsinkt, unter der Voraussetzung, daß die Ausflußöffnung gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre ungemein klein sei 207

Mittlere Ausflußgeschwindigkeit und mittlere Druckhöhe einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit, wenn die vertikalen Dimensionen der Ausflußöffnung im Vergleich zu der Druckhöhe bedeutend sind.

75. Allgemeiner Ausdruck für die mittlere Ausflußgeschwindigkeit und die mittlere Druckhöhe 209

76. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Paralleltrapez bildet, dessen parallele Seiten horizontal sind 213

77. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Rechteck mit zwei horizontal liegenden Seiten bildet 217

78. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Dreieck mit horizontaler Basis bildet, wenn die Spitze des Dreiecks nach oben und die Basis nach unten gekehrt ist 218

79. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Dreieck mit horizontaler Basis bildet, wenn die Spitze des Dreiecks nach unten und die Basis nach oben gekehrt ist 219

80. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, deren vertikale Projektion ein Kreis ist 219

Ausfluß einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit aus einer Öffnung, welche nach innen dergestalt allmählig erweitert ist, daß sämmtliche Theilchen der Flüssigkeit parallel zu einer gemeinschaftlichen Axe austreten können. — Kontraktion des flüssigen Strahles.

81. Kontraktion des flüssigen Strahles 221

82. Versuche, die Größe der vollkommenen Kontraktion aus theoretischen Betrachtungen abzuleiten 224

83. Formeln für den Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße unter Berücksichtigung der Kontraktion des Strahles 231

84. Praktische Erfahrungen über die Größe und Wirkung der vollständigen Kontraktion bei Öffnungen in sehr dünnen Wänden und bei verschiedenen Druckhöhen 234

85. Verschiedene Fälle der unvollkommenen Kontraktion 239

86. Erfahrungen über den Ausfluß des Wassers aus rechtwinkligen Öffnungen in dünnen Wänden, wenn sich an diese Öffnungen Gerinne oder Kanäle anschließen 242

§. Seite
87. Einfluß der Widerstände, gegen welche der Strahl bei seinem Heraustreten trifft, auf die Ausflußmenge 243

Figur des aus einem Gefäße in die Luft springenden flüssigen Strahles.

88. Fall, wo der Strahl vertikal nach unten ausfließt 244
89. Fall, wo der Strahl vertikal nach oben ausfließt 245
90. Fall, wo der Strahl in horizontaler Richtung austritt 247
91. Inversion oder Verdrehung des Strahles bei nichtkreisförmigen Öffnungen 249

Ausfluß einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit aus einem Überfalle.

92. Ausfluß aus einem Überfalle, wenn die Wände desselben nach innen gehörig erweitert und abgerundet sind, sodaß keine Kontraktion stattfindet 251
93. Erfahrungen über den Ausfluß des Wassers aus einer Überfallöffnung in einer dünnen vertikalen Wand 256
94. Beobachtete Höhe des aus Überfallöffnungen in dünnen Wänden hervortretenden Wasserstrahles 257
95. Erfahrungen über den Ausfluß des Wassers aus einer Überfallöffnung mit einem Gerinne 259
96. Ausfluß aus einem mit einer Überfallöffnung versehenen Behälter, welcher sich leert 259

Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem Gefäße, in welchem sich an mehreren Stellen der Querschnitt plötzlich um eine endliche Größe ändert.

96a. Bewegung einer Flüssigkeit unter den vorstehenden Voraussetzungen in einer engen Röhre 261
96b. Gleichförmiger Ausfluß einer Flüssigkeit aus der obigen mit Scheidewänden versehenen Röhre, wenn der obere Spiegel der Flüssigkeit auf konstanter Höhe erhalten wird 266
96c. Gleichförmiger Ausfluß aus einer Röhre mit Scheidewänden und plötzlichen Erweiterungen und Verengungen 270
96d. Ausfluß aus einer Röhre mit Scheidewänden, in welcher der Spiegel der Flüssigkeit allmählig herabsinkt 273
96e. Ausfluß aus einem mit Zwischenwänden oder sonstigen plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen versehenen Gefäße von beliebiger Gestalt 274
96f. Veränderung der Höhe eines aus einem Gefäße mit Zwischenwänden vertikal hervorspringenden Strahles, wenn das Gefäß sich allmählig leert 276

Beharrlicher Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem mit einer kurzen Ansatzröhre versehenen Gefäße.

96g. Formeln für den Ausfluß durch eine zylindrische oder prismatische Ansatzröhre 278

§. Seite
104. Erfahrungen über den Ausfluß des Waſſers aus kurzen zylindriſchen oder prismatiſchen Anſatzröhren 285
105. Erfahrungen über den Ausfluß des Waſſers aus koniſchen Anſatzröhren 289

Ausfluß einer ſchweren unpreßbaren Flüſſigkeit aus einem Gefäße, welches unter dem Spiegel eines mit gleicher Flüſſigkeit gefüllten zweiten Gefäßes ausmündet.

106. Beharrlicher Ausfluß aus einem Gefäße, deſſen Ausflußöffnung unter dem Spiegel eines zweiten Gefäßes liegt 291
107. Fall, wo der Spiegel des erſten Gefäßes auf konſtanter Höhe gehalten wird, während der Spiegel des zweiten Gefäßes ſich hebt . 296
108. Fall, wo der Spiegel des zweiten Gefäßes auf konſtanter Höhe erhalten wird, während der Spiegel des erſten Gefäßes ſich ſenkt 299
109. Fall, wo ſich der Spiegel im erſten Gefäße ſenkt, während ſich der Spiegel im zweiten Gefäße hebt 300
110. Beharrlicher Ausfluß aus einem Gefäße, deſſen Querſchnitte ſich an manchen Stellen plötzlich ändern, wenn daſſelbe unter dem Spiegel eines zweiten Gefäßes ausmündet 302
111. Ausfluß aus einem Gefäße, wenn die Ausflußöffnung nur zum Theil von dem Spiegel eines zweiten Gefäßes bedeckt iſt 304

Durchfluß einer ſchweren unpreßbaaren Flüſſigkeit durch mehrere oben offene Gefäße.

112. Allgemeiner Fall des Durchfluſſes durch zwei oben offene Gefäße . 305
113. Fall, wo das obere Gefäß keine Flüſſigkeit empfängt, während das untere die Flüſſigkeit entläßt 307
114. Fall, wo das obere Gefäß keine Flüſſigkeit empfängt und das untere keine entläßt 307
115. Fall, wo der Spiegel des oberen Gefäßes ſtets auf konſtanter Höhe erhalten wird, während das untere Gefäß die Flüſſigkeit entläßt 308
116 Fall, wo der Spiegel des oberen Gefäßes ſtets auf konſtanter Höhe erhalten wird, während das untere Gefäß keine Flüſſigkeit entläßt 309
117. Durchfluß einer Flüſſigkeit durch drei oben offene Gefäße im Beharrungszuſtande 309
118. Durchfluß einer Flüſſigkeit durch mehrere oben offene Gefäße, wenn dieſe Gefäße plötzliche Änderungen des Querſchnittes enthalten . 311

Oszillationen einer Säule von einer ſchweren unpreßbaren Flüſſigkeit.

119. Oszillationen einer Flüſſigkeit, welche in einer aus zwei vertikalen Schenkeln beſtehenden Röhre enthalten iſt 313
120. Oszillationen einer Flüſſigkeit in einer vertikalen Röhre, welche in ein Gefäß von ungemein großer Oberfläche ausmündet . . . 319

Von dem Geſammtdrucke, welchen ein Gefäß, in dem ſich eine ſchwere unpreßbare Flüſſigkeit bewegt, auszuhalten hat.

121. Allgemeine Betrachtungen über dieſen Druck 326

§. Seite
122. Bestimmung des Gesammtdruckes einer in Bewegung begriffenen Flüssigkeit gegen eine Röhre von sehr kleinen Querschnitten, in welcher dieselbe enthalten ist 331
123. Gesammtdruck einer Flüssigkeit gegen eine Röhre, wenn die Letztere stets voll erhalten wird, und die Flüssigkeit aus derselben entströmt 337
124. Gesammtdruck einer aus einem Gefäße von beliebiger Gestalt entströmenden Flüssigkeit gegen dieses Gefäß 340

Gleichgewicht und Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem bewegten Gefäße.

125. Gestalt der freien Oberfläche und Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit, welche sich in einem Gefäße befindet, das mit veränderlicher Geschwindigkeit in irgend einer geradlinigen Richtung fortbewegt wird 345
126. Ausfluß aus einem Gefäße, welches mit veränderlicher Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegt wird 353
127. Gestalt der freien Oberfläche und Druck einer Flüssigkeit in einem Gefäße, welches mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Axe gedrehet wird 356
128. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Axe gedrehet wird . 358
129. Gleichgewicht einer Flüssigkeit in einem Gefäße, welches mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine horizontale Axe gedrehet wird 364

Druckfehler.

Seite 178, Zeile 2 von oben lies $\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ statt $\Sigma\left(\frac{\Omega}{w_1}-\frac{\Omega}{w_2}\right)^2$.

» 196, » 4 » » » 31,7 Fuß statt 31,7.

» 209, » 1 u. 2 » » unterdrücke die Worte: die Zeit, in welcher sich das eben betrachtete Gefäß leert, doppelt so groß ist, als.

» 291, » 21 » » lies unpreßbaren statt elastischen.

Erſter Abſchnitt.

Die Prinzipien der Hydroſtatik.

I. Die Fundamentalgleichungen der Hydroſtatik.

§. 1. Allgemeine Begriffe.

Eine vollkommene Flüſſigkeit iſt ein Körper, deſſen kleinſte Maſſentheilchen ſich ohne den mindeſten Reibungswiderſtand aneinander verſchieben laſſen, wie groß auch der Grad ihres Zuſammenhanges oder ihrer Kohäſion, d. h. ihr Widerſtand gegen eine vollkommene Trennung ſein mag. In der Natur gibt es dergleichen Körper im vollſten Sinne der vorſtehenden Definition nicht: alle irdiſchen Flüſſigkeiten beſitzen einen gewiſſen Grad von Adhäſion, Reibung oder Klebrigkeit, demzufolge ſie nur näherungsweiſe dem obigen Begriffe untergeordnet werden können; ſie ſetzen der Verſchiebung ihrer kleinſten Theile aneinander einen im Allgemeinen nur ſchwachen, aber je nach ihrer beſonderen Natur verſchiedenen Widerſtand entgegen — man nennt ſie daher unvollkommene Flüſſigkeiten.

Eine beſtimmte Quantität irgend einer flüſſigen Maſſe kann wegen der vollkommenen Beweglichkeit aller ihrer Theile offenbar in eine jede beliebige Form gebracht werden, deren Rauminhalt dem Volum jener Quantität entſpricht. Denkt man ſich die flüſſige Maſſe von einer ſolchen Beſchaffenheit, daß die obige abgemeſſene Quantität derſelben immer nur eine Form annehmen kann, deren körperlicher Inhalt dem anfänglichen Volum genau

gleich ist; so heißt sie eine unpreßbare oder tropfbare Flüssigkeit. Die erstere Bezeichnung hat ihren Grund darin, daß eine solche flüssige Masse durch keine Gewalt auf ein kleineres Volum zusammengedrückt werden kann; die letztere hat ihn darin, daß wenn man versuchen wollte, das Volum jener bestimmten Menge von Flüssigkeit durch mechanische Ausdehnung zu vergrößern, man den Zusammenhang zwischen den einzelnen Theilen derselben aufheben und dieselbe in Tropfen auflösen würde, deren Gesammtinhalt jedoch dem obigen Volum vollkommen gleich bliebe. Zu den bekannten Flüssigkeiten, welche die vorstehenden Eigenschaften zwar nicht im vollkommenen Grade, aber doch näherungsweise, besitzen, gehört unter vielen andern das Wasser und das Quecksilber.

Die Vorstellung einer Flüssigkeit, welche, durch innere Repulsionskräfte getrieben, ein Bestreben besitzt, einen jeden nochso großen Raum zu erfüllen, und welche durch angemessene, auf ihren Umgränzungsflächen angebrachte Kräfte auf einen jeden nochso kleinen Raum zusammengedrückt werden kann, erweckt den Begriff einer elastischen oder expansibelen Flüssigkeit. Es leuchtet ein, daß eine bestimmte Menge einer solchen Flüssigkeit einen jeden beliebigen Raum erfüllen kann, und auf die Wände des Gefäßes, in welchem sie enthalten ist, stets einen gewissen Druck ausüben wird. Bei vollkommen elastischen Flüssigkeiten muß zwischen einer gegebenen Masse derselben, dem körperlichen Volum, welches sie erfüllt, und dem Drucke, welchen diese Masse auf die umschließenden Gefäßwände ausübt, eine in der Folge näher zu erörternde Beziehung stattfinden; außerdem muß eine solche Masse fähig gedacht werden, sich durch eine unendliche Vermehrung der komprimirenden Kräfte auf ein unendlich kleines Raumelement reduziren zu lassen, während sie sich bei gänzlicher Hinwegnahme aller äußeren Druckkräfte oder bei der Öffnung des umschließenden Gefäßes ins Unendliche ausdehnen würde. Atmosphärische Luft und alle Arten von Gasen und Dämpfen sind elastische Flüssigkeiten, welchen die eben erwähnten Eigenschaften in ziemlich hohem Grade, wenn auch nicht in aller Strenge zukommen.

Die **Hydrostatik** handelt vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten. Sie lehrt die Beziehungen kennen, welche zwischen den ver-

schiedenen Kräften obwalten müssen, damit sie im Stande seien, eine gegebene flüssige Masse im Zustande der Ruhe oder überhaupt im Beharrungszustande einer allen Theilen gemeinschaftlichen gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und erklärt die Erscheinungen, welche diesen Zustand unter mancherlei Umständen begleiten. Im engeren Sinne des Wortes versteht man unter Hydrostatik die Statik der unpreßbaren Flüssigkeiten, und bezeichnet alsdann die Lehre vom Gleichgewichte der elastischen Flüssigkeiten mit dem Namen der Aerostatik.

§. 2. Aus der Mechanik werden hier noch folgende allgemeine Sätze, welche sich nicht bloß auf starre, sondern auch auf alle Arten von flüssigen Körpern beziehen, zur Erinnerung gebracht.

Wenn K das körperliche Volum irgend eines Körpers, M die darin enthaltene Masse oder die Quantität seiner Materie, μ die in der Volumeinheit enthaltene Masse oder die Dichtigkeit des Körpers bezeichnet; so hat man

$$\mu K = M \qquad \ldots\ (1)$$

Wird nun ein jedes Massentheilchen dieses Körpers von einer gleichen und einer gemeinsamen Richtung parallelen Kraft sollizitirt; so sei der Gesammtdruck, welchen der Körper in Folge der Einwirkung der erwähnten Kräfte auf eine feste Widerlage ausüben würde, gleich P. Setzt man ferner die Geschwindigkeit, welche die in dem Körper wirkende Kraft der Materie in jeder Zeiteinheit mitzutheilen im Stande wäre, sobald sich der Bewegung des Körper gar kein Widerstand entgegensetzte, gleich f; so hat man

$$\left.\begin{aligned} Mf &= P \\ \text{oder} \qquad M &= \frac{P}{f}, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (2)$$

wegen Gleichung (1) aber auch

$$\mu K f = P \qquad \ldots\ (3)$$

Bezeichnet man die Wirkung jener Kraft in die Volumeinheit mit p, sodaß man

$$pK = P$$

hat; so folgt auch

$$Mf = pK \qquad \ldots\ (4)$$

und auch

$$\mu f = p \qquad \ldots\ (5)$$

Wenn die in Rede stehende Kraft die Schwere ist, welche den Körpern an der Oberfläche der Erde bei Berlin in der Sekunde die Geschwindigkeit $g = 31{,}2644$ Fuß rheinl. mittheilt; so stellt P das Gewicht der Masse M oder des Volums K dar. Setzt man dieses Gewicht $= W$ und das Gewicht der Volumeinheit $= w$; so hat man wegen der Gleichungen (4) und (5)

$$\left.\begin{aligned} Mg &= W \\ \text{oder} \\ M &= \frac{W}{g} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (6)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mu g &= w \\ \text{oder} \\ \mu &= \frac{w}{g} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (7)$$

Sobald es sich also um einen schweren Körper an der Oberfläche der Erde handelt, auf dessen Massentheilchen noch die Kraft P gleichmäßig vertheilt wäre; so kann man statt der Formeln (2), (3) und (5) auch die folgenden

$$\frac{W}{g} f = P \qquad \ldots\ (8)$$

$$\frac{wK}{g} f = P \qquad \ldots\ (9)$$

$$\frac{w}{g} f = p \qquad \ldots\ (10)$$

einführen.

Aus der Gleichung (5) erkennt man, daß die Größe f, welche die Geschwindigkeit bezeichnet, die dem Körper von der darauf angebrachten Kraft in der Zeiteinheit mitgetheilt werden würde, auch den Druck darstellen kann, welchen eine jede

Masseneinheit des von dieser Kraft ergriffenen Körpers gegen eine feste Widerlage ausüben würde.

Da Ebendasselbe auch von der Größe g (Gl. 7) gilt; so kann man sagen, die den schweren Körpern von der Schwerkraft in der Sekunde mitgetheilte Geschwindigkeit sei $g = 31{,}2644$ rheinl. Fuß, oder auch, das Gewicht der Masseneinheit aller ponderabelen Materie betrage 31,2644 Gewichtseinheiten.

Allgemeine Beziehungen zwischen den auf eine Flüssigkeit angebrachten Kräften, dem in irgend einem Punkte der Flüssigkeit stattfindenden Drucke und den Gestalten der Flächen von gleichem Niveau.

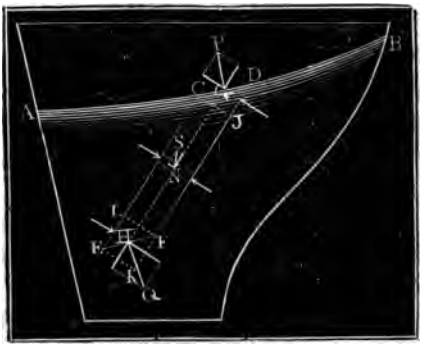
§. 3. **Hülfssatz.** — Wenn sich zwei im Gleichgewichte befindliche Körper, auf welche beliebige Kräfte wirken, mit ihren **absolut glatten** Oberflächen berühren, und demgemäß einen Druck aufeinander ausüben; so wird die Resultante aller auf den Einen Körper angebrachten Kräfte der Resultante aller auf den anderen Körper angebrachten Kräfte nicht bloß gleich und **direkt entgegengesetzt** sein, sondern dieselbe wird **auch in dem Punkte, wo sie die gemeinschaftliche Berührungsfläche beider Körper durchschneidet, auf dieser perpendikular** stehen.

Denn angenommen, die erwähnte Resultante schlösse mit der Normalen auf der Berührungsfläche irgend einen Winkel ein; so könnte man dieselbe in zwei andere Kräfte zerlegen, von denen die Eine mit der Richtung der Normalen und die andere mit der Richtung der Tangente an jener Berührungsfläche zusammenfiele. Mit der Kraft der ersteren Komponente würden alsdann beide Körper perpendikular gegeneinander gepreßt werden, und vermöge der zweiten Komponente würden sie ein Bestreben äußern, aufeinander fortzugleiten. Da ein solches Gleiten nur durch etwaige Erhabenheiten auf den beiderseitigen Oberflächen, nicht aber bei absolut glatten Flächen, wie sie hier vorausgesetzt sind, verhindert, und die Körper in Ruhe gehalten werden könnten; so folgt, daß unter den gegebenen Bedingungen der Gleichgewichtszustand nur dann stattfinden kann, wenn die letztere

Komponente in tangentialer Richtung zu der Berührungsfläche gleich null, oder wenn die Richtung des Druckes, den beide Körper aufeinander ausüben, mit der Normalen auf jener Fläche zusammenfällt.

§. 4. Bestimmung des Druckes, welcher in irgend einem Punkte einer Flüssigkeit stattfindet.

Auf die Massentheilchen einer bestimmten zum Theil von Gefäßwänden umschlossenen Flüssigkeit seien beliebige Kräfte angebracht, außerdem wirke auf die freie Oberfläche **AB** der Flüssigkeit überall in normaler Richtung eine Kraft, deren Betrag



für die Flächeneinheit in allen Punkten sich gleich bleibe. Die Flüssigkeit sei im Gleichgewichte, und der Spiegel derselben bilde die krumme Fläche **AGB**. Denkt man sich einen Theil dieser Flüssigkeit, welcher ein Prisma **CDFE** von unendlich kleinem Querschnitte bildet, dessen obere als eben anzusehende Begränzungsfläche der Theil **CD** der freien Oberfläche ist und dessen untere Begränzungsfläche **EF** in der Ebene eines beliebigen Querschnittes der Flüssigkeit liegt; so sei

a der konstante unendlich kleine Querschnitt des Prismas **GH**,
s, der Abstand **GH** der Mittelpunkte der beiden Endflächen **CD** und **EF** des Prismas,
α der Neigungswinkel **DCJ** der oberen Erdfläche und
β der Neigungswinkel **FEK** der unteren Erdfläche gegen eine auf der Are **GH** des Prismas normal stehende Ebene **CJ** oder **EK**,

s der Abſtand GN eines normalen Querſchnittes des Prismas vom Punkte G der freien Oberfläche,

$a\triangle s$ das Volum eines Maſſentheilchens der Flüſſigkeit bei N vom Querſchnitte a und von der ſehr kleinen Höhe $\triangle s$,

μ die Dichtigkeit oder die in der Volumeinheit enthaltene Maſſe der Flüſſigkeit im Punkte N, ſodaß die Maſſe m des oben erwähnten Theilchens

$m=\mu a\triangle s$ iſt,

p der in normaler Richtung gegen die freie Oberfläche der Flüſſigkeit auf jede Flächeneinheit angebrachte Druck,

f die Geſchwindigkeit, welche die in das Theilchen bei N wirkende Kraft in der Zeiteinheit der Materie mitzutheilen im Stande iſt, ſodaß der Druck F dieſer Kraft auf eine Quantität der Flüſſigkeit von der Maſſe M oder von dem Volum K im Punkte N

$F=Mf=\mu Kf$ iſt,

ϑ der Winkel SNG, welchen die Richtung dieſer Kraft mit der Axe GH des Prismas bildet,

q der Druck der Flüſſigkeit im Punkte H auf die Flächeneinheit.

Betrachten wir jetzt das Prisma GH mit allen auf dasſelbe wirkenden Kräften; ſo finden wir, daß dasſelbe folgenden Kräften unterworfen iſt: 1) dem in normaler Richtung PG gegen die obere Endfläche angebrachten Drucke, 2) ſämmtlichen Kräften, welche in die einzelnen Maſſentheilchen jenes Prismas zwiſchen den Flächen CD und EF wirken, 3) den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit gegen die mit der Axe GH parallelen Seitenwände des Prismas rings um dasſelbe herum und 4) dem Widerſtande der umgebenden Flüſſigkeit gegen die untere Erdfläche EF in der Richtung QH.

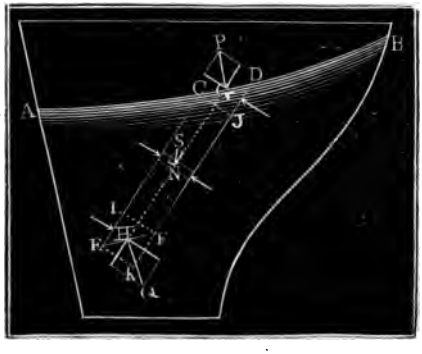
Sämmtliche vorbenannten Kräfte müſſen unter einander im Gleichgewichte ſein; es leuchtet aber auch ein, daß ſich dieſelben an der Flüſſigkeitsſäule GH nicht wie an einem ſtarren Stabe, ſondern wie an einem vollkommen biegſamen Faden, der nur in der Richtung ſeiner Länge Widerſtand leiſten oder Spannung ertragen kann, im Gleichgewichte erhalten müſſen. Wegen der unendlich leichten Verſchieblichkeit der Theilchen jener Säule wird derſelben nämlich alle Widerſtandsfähigkeit gegen eine eventuelle Biegung, wie ſie ein ſtarrer Körper beſitzt, entzogen, und

die fraglichen Kräfte können sich an derselben nicht wie an einem unbiegsamen Hebel, sondern nur in einer solchen Weise im Gleichgewichte erhalten, wo sie in gerader Linie gegeneinander gepreßt oder voneinander gezogen werden, (das Letztere natürlich nur in so weit, als die Flüssigkeit Kohäsion besitzt) also nur in einer Weise, welche dem Falle eines vollkommen biegsamen Fadens entspricht.

Hieraus folgt, wenn man eine jede der unter der obigen Klassifikation enthaltenen Kräfte in zwei andere zerlegt, von denen die Eine parallel zur Axe GH des Prismas und die andere perpendikular zu dieser Axe wirkt, erstens, daß sämmtliche in die Richtung GH fallende Kräfte für sich im Gleichgewichte sein oder sich gegenseitig vernichten müssen, zweitens, daß von allen übrigen, in perpendikularer Richtung zu der Axe des Prismas wirkenden Kräften sich allemal diejenigen gegenseitig aufheben müssen, welche rings um und in einem Stücke jenes Prismas liegen, das von zwei unendlich benachbarten, auf der Axe GH perpendikular stehenden Querschnitten des Prismas begränzt ist. Denn wären die letzteren Komponenten nicht in einer jeden normalen Querschicht des fraglichen Prismas für sich im Gleichgewichte; so müßte sich die Gesammtheit aller wie an einem unbiegsamen Stabe nach der Theorie des Hebels im Gleichgewichte erhalten, was wegen der Verschieblichkeit der Theilchen der flüssigen Masse nicht möglich ist.

Um nun die vorstehenden Komponenten der obigen Kräfte resp. in paralleler und perpendikularer Richtung zur Axe GH zu bestimmen; so hat man

1) für den gegen die obere Erdfläche $CD = \frac{a}{\cos \alpha}$ angebrach-



ten äußeren Druck, deſſen Richtung auf der Ebene OD normal ſteht, und deſſen Betrag für die Flächeneinheit $=p$ iſt, den Werth $\frac{ap}{\cos\alpha}$. Die beiden Komponenten dieſes Druckes in paralleler und perpendikularer Richtung zur Axe GH ſind reſp. $\frac{ap}{\cos\alpha}.\cos\alpha = ap$ und $\frac{ap}{\cos\alpha}.\sin\alpha = ap\,\mathrm{tang}\,\alpha$.

2) hat man für die Kraft, welche in der Richtung SN auf das Maſſenelement des Prismas im Punkte N wirkt, wenn man beachtet, daß dieſes Element von zwei unendlich benachbarten normalen Querſchnitten eingeſchloſſen iſt, alſo das Volum $a\triangle s$ und die Maſſe $\mu a\triangle s$ beſitzt, den Werth $\mu f a\triangle s$. Die Komponenten dieſer Kraft parallel und perpendikular zur Axe GH ſind reſp. $\mu f a\cos\vartheta.\triangle s$ und $\mu f a\sin\vartheta.\triangle s$. In den letzteren Ausdrücken ſind natürlich die drei Größen μ, f und ϑ im Allgemeinen veränderlich, indem dieſelben für die verſchiedenen Punkte der Axe GH oder für die verſchiedenen Werthe von s, welche zwiſchen den Gränzen $s=o$ und $s=s_1$ liegen, nach gewiſſen Geſetzen variiren können. Die Summe aller ebengenannten Komponenten der Kräfte $\mu f a\triangle s$ in paralleler Richtung zur Axe GH ſei $\Sigma\mu f a\cos\vartheta.\triangle s$, oder da der unendlich kleine Querſchnitt a des Prismas überall konſtant iſt $=a\Sigma\mu f\cos\vartheta.\triangle s$. Da die Höhe $\triangle s$ des Elementes bei N in der Richtung der Axe GH unendlich klein ſein ſoll; ſo wird man für dieſelbe das Differenzial ds der Höhe GN$=s$ ſetzen und aus Gründen der Analyſis

$$a\int_0^{s_1}\mu f\cos\vartheta.ds$$

für die Summe der obigen Komponenten zwiſchen den Punkten G und H nehmen können. Hierbei wird vorausgeſetzt, daß eine jede der drei veränderlichen Größen μ, f und ϑ als eine Funktion der zugehörigen Höhe s gegeben ſei.

3) Sämmtliche Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit gegen die Umfangswände des Prismas GH müſſen, weil dieſe Wände, ſowie die der angränzenden Flüſſigkeit, als abſolut glatt anzuſehen ſind, nach § 3 überall normal gegen jene Wände gerichtet ſein.

Die gegen die Seitenwände des Prismas wirkenden Pressungen bedürfen daher keiner weiteren Zerlegung, da ihre Richtungen in allen Punkten perpendikular auf der Axe GH des Prismas stehen. Nimmt man alle Pressungen der umgebenden Flüssigkeit gegen die Seitenwände eines zwischen zwei unendlich benachbarten Querschnitten liegenden Elementes N mit der Kraft $\mu f a \sin\vartheta . \triangle s$ zusammen, welche die zweite Komponente der in jenes Element wirkenden Kraft $\mu f a \triangle s$ bildet; so ist schon vorhin bemerkt, daß sich diese Kräfte in allen Punkten der Linie GH gegenseitig vernichten müssen, da sie sich an dem Prisma nicht, wie an einem starren unbiegsamen Stabe, im Gleichgewichte erhalten können.

4) Der Widerstand der umgebenden Flüssigkeit gegen die untere Endfläche EF des Prismas nach der Linie QH kann, wie die ebenerwähnten Pressungen, wegen § 3, nur normal gegen jene Fläche gerichtet sein. Nimmt man an, der Druck der äußeren Flüssigkeit gegen die Fläche EF sei gleichförmig über die Letztere vertheilt, was offenbar zulässig ist, sobald man sich jene Fläche von unendlich kleiner Ausdehnung denkt; so wird, weil die Fläche EF gleich $\frac{a}{\cos\beta}$ ist, der gesammte Widerstand der Flüssigkeit gegen die Fläche EF oder die in der Richtung QH wirkende Resultante aller elementaren Widerstände gegen diese Fläche $= \frac{aq}{\cos\beta}$ sein, sobald man mit q den normalen Druck der Flüssigkeit gegen eine jede Flächeneinheit der Fläche EF bezeichnet. Die zur Axe GH parallele und perpendikulare Komponente dieses Widerstandes ist hiernach resp. $\frac{aq}{\cos\beta} . \cos\beta = aq$ und $\frac{aq}{\cos\beta} . \sin\beta = aq \operatorname{tang}\beta$. Die letztere, auf der Axe GH perpendikular stehende Komponente setzt sich mit den Pressungen ins Gleichgewicht, welche die umgebende Flüssigkeit gegen die übrigen Umfangswände der kleinen keilförmigen Masse EFL ausübt, ebenso wie sich die entsprechende Komponente des in der Richtung PG wirkenden Druckes gegen die obere Endfläche des Prismas mit den Pressungen ins Gleichgewicht setzt, welche die äußere Flüssigkeit gegen die übrigen Umfangswände der kleinen keilförmigen Masse DCJ ausübt.

Damit nun Gleichgewicht stattfinde zwischen den in der Linie

GH wirkenden Kräften, von denen die beiden Kräfte aq und $a\int_0^{\vartheta_1}\mu f\cos\vartheta.ds$ in der Richtung GH und die Kraft aq in entgegengesetzter Richtung HG wirkt, muß man offenbar die Gleichung

$$aq=ap+a\int_0^{\vartheta_1}\mu f\cos\vartheta.ds$$

oder, wenn man mit a dividirt,

$$q=p+\int_0^{\vartheta_1}\mu f\cos\vartheta.ds \qquad \ldots\ (11)$$

haben.

Durch diesen Werth von q wird, wenn man sich den Querschnitt des Prismas GH immer mehr und mehr verkleinert denkt, bis dasselbe im Begreffe ist, sich auf die materielle Linie GH und die Fläche CD und EF auf die materiellen Punkte G und H zu reduziren, ganz genau der Druck dargestellt, welcher im Punkte H der Flüssigkeit sowol in der Richtung QH, wie in der entgegengesetzten Richtung HQ stattfindet. Dieser Druck ist auf die Flächeneinheit bezogen, d. h., er stellt die Resultante aller Pressungen dar, welche sich in der Ausdehnung einer Flächeneinheit äußeren würden, sobald in jedem Punkte dieser Flächeneinheit ein gleicher Druck, wie im Punkte H, angebracht wäre.

Denkt man sich das Prisma GH um seine Axe herumgedrehet, sodaß jedoch die obere Endfläche CD immer in der Richtung der freien Oberfläche der Flüssigkeit liegen bleibt und nur die untere Endfläche EF ohne ihre Neigung gegen die Axe oder gegen die normalen Querschnitte zu ändern, sukzessive in verschiedene Lagen kommt; so wird für alle diese Lagen die obige Gleichung (11) Gültigkeit behalten und den in normaler Richtung zu EF stattfindenden Druck im Punkte H darstellen. Man erkennt auch, daß jene Gleichung vom Winkel β oder von der Neigung der Fläche EF gegen die normalen Querschnitte des Prismas unabhängig ist, daß man also in einer jeden der eben bezeichneten Lagen, in welche die Fläche EF bei ihrer Rotation um die Axe GH ge-

langt, annehmen könne, der Neigungswinkel FEK $= \beta$ variire von 0 bis 90°, ohne daß dadurch der Druck der Flüssigkeit in normaler Richtung zur Fläche EF eine Änderung erleide. Hieraus geht hervor, daß sich im Punkte H nach allen Richtungen des Raumes ein Druck äußere, dessen Betrag, auf die Flächeneinheit bezogen, den Werth q aus Gleichung (11) hat.

Diesen Druck, welchen eine Flüssigkeit im Zustande des Gleichgewichts ausübt, nennt man den hydrostatischen Druck derselben.

§ 5. Fortpflanzung des Druckes durch eine Flüssigkeit, und allgemeine Bedingungen für die Natur der Kräfte, welche eine Flüssigkeit im Gleichgewichte zu erhalten vermögen.

Wenn in die einzelnen Massentheilchen der vorhin betrachteten Flüssigkeit gar keine Kräfte einwirkten, wenn also in allen Punkten $f = o$ wäre; so würde sich die Gleichung (11) auf

$$q = p$$

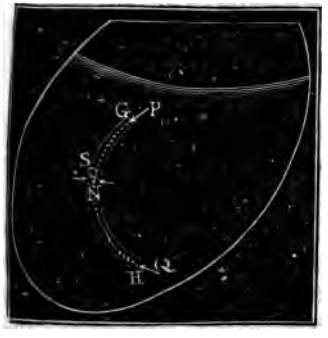
reduziren, und es würde in allen Punkten der Flüssigkeit nur der Druck p stattfinden.

Statt daß man im vorhergehenden Paragraphe annahm, G sei ein Punkt der freien Oberfläche, konnte man sich auch denken, G sei ein Punkt inmitten der Flüssigkeit, wo eben der Druck p herrschte. Die Gleichung (11) würde alsdann immer den in H stattfindenden Druck darstellen. Für den Fall, daß überall $f = o$, also die Massentheilchen der Flüssigkeit von gar keinen inneren Kräften sollizitirt wären, würde die Gleichung (11) von der Richtung der Linie GH ganz unabhängig sein, und der im Punkte G stattfindende Druck würde sich von G aus durch die ganze Flüssigkeit fortpflanzen. Diese Fortpflanzung kann sowol auf geradem Wege GH, wie auch auf jedem anderen gebrochenen oder krummlinigen Wege gedacht werden, da man bei einer gebrochenen Linie, zu deren allgemeinsten Falle auch die stetige Kurve gehört, von jeder geradlinien Seite Dasselbe darthun kann, was vorhin von der Linie GH nachgewiesen ist.

Die ebenerwähnte Forpflanzung eines Druckes p von einem beliebigen gegebenen Punkte G einer Flüssigkeit nach irgend einem

anderen Punkte H auf geradem oder krummem Wege findet offenbar auch dann noch statt, wenn die einzelnen Massentheilchen der Flüssigkeit noch durch innere Kräfte f angegriffen werden, da durch solche Kräfte nur der Werth des zweiten Gliedes auf der rechten Seite der Gleichung (11) bestimmt, das konstante Glied p aber ganz ungeändert gelassen wird.

Wenn sich nun auch für den Fall, daß die Theilchen der Flüssigkeit selbst von Kräften f belebt sind, ein jeder im Punkte G stattfindende Druck p auf jedem beliebigen Wege GNH bis zum Punkte H forzpflanzt, um daselbst einen Theil des bei H stattfindenden Druckes q auszumachen; so geht doch aus der Natur der Gleichung (11) noch nicht hervor, ob der andere Theil des Druckes q stets denselben Werth annehme, gleichviel, auf welchem gebrochenen oder krummen Wege man die Fortpflanzung der Kräfte f von G bis H vor sich gehend annehme. Damit die Flüssigkeit im Gleichgewichte erhalten werde, ist es offenbar ein nothwendiges Erforderniß, daß jene Fortpflanzung von der Beschaffenheit des Weges GNH ganz unabhängig sei, und es fragt sich, ob dieses Erforderniß nicht zu einem allgemeinen Gesetze führe, welchem die in die Massentheilchen wirkenden Kräfte nothwendig unterworfen sein müssen, wenn sie überhaupt im Stande sein sollen, eine davon sollizitirte Flüssigkeit im Gleichgewichte zu erhalten.



Zu diesem Ende bestimmen wir den Druck q auf die Flächeneinheit im Punkte Q, welcher sich vom Punkte P her, woselbst der Druck p herrscht, auf dem krummlienigen Wege GNH erzeugt, indem wir GNH wie eine Flüssigkeitssäule mit krummer Axe und unendlich kleinen gleichförmigem Querschnitte a betrachten, welche bei G und H normal zu ihrer Axe abgeschnitten ist. Außerdem seien

x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten irgend eines Punktes N der Axe PNH,

s die Länge des Axenstückes GN,

ds die Höhe des zwischen zwei normalen Querschnitten der Röhre bei N liegenden Massenelementes,

μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Punkte N,

f die Geschwindigkeit, welche die in das Theilchen N wirkende Kraft in der Zeiteinheit der Materie mitzutheilen im Stande ist, sodaß der Druck F dieser Kraft auf eine Quantität der Flüssigkeit von der Masse M oder von dem Volum K im Punkte N

$F = Mf = \mu Kf$ ist,

f_1, f_2, f_3 die Komponenten der Geschwindigkeit f in parallelen Richtungen zu den drei Koordinatenaxen der x, y, z, auf welche die Lage der Kurve GNH bezogen ist,

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= Mf_1 = \mu Kf_1 \\ F_2 &= Mf_2 = \mu Kf_2 \\ F_3 &= Mf_3 = \mu Kf_3 \end{aligned}\right\} \text{die Komponenten des Druckes F nach denselben drei Richtungen.}$$

Zerlegt man alle auf die flüssige Masse GNH angebrachten Kräfte, sowol innere, wie äußere, wobei unter den letzteren die Pressungen der umgebenden Flüssigkeit verstanden werden, in zwei andere, von denen die Eine in die Richtung des Kurvenelementes oder der Tangente der Axe GNH in dem betreffenden Punkte fällt, die andere aber auf dieser Axe normal steht; so findet man, wie im vorhergehenden Paragraphe, daß sich von den letzteren normalen Komponenten allemal diejenigen gegenseitig vernichten müssen, welche rings um einen narmalen Querschnitt der fraglichen Röhre liegen, und daß die ersteren, längs der Axe GNH gerichteten Komponenten, mit Einschluß der in den Richtungen PG und QH gegen die Endflächen der Röhre wirkenden Kräfte, für sich ein im Gleichgewichte befindliches System bilden müssen. Dies Letztere wird besonders einleuchtend, wenn man sich die Axe der Röhre GNH als ein Polygon von beliebig vielen Seiten denkt, auf dessen jede Seite sich alsdann eine Betrachtung, ähnlich der in § 4 mit dem Prisma GH angestellten, anwenden läßt. Die Kräfte p und q werden bei einer jeden dieser Polygonseiten durch die Pressungen vertreten, welche sich gegen die obere und untere Endfläche des betreffenden Röhrenstückes auf die Flächeneinheit äußern. Da sich in den Ecken des fraglichen Polygons je zwei solcher Röhrenstücke in einer Ebene berühren und mit

denſelben Kräften gegen einander drücken; ſo ſieht man nach § 4 ein, daß ſich die längs der polygonalen Axe GNH auf die verſchiedenen Maſſentheilchen der Flüſſigkeit wirkenden Kräfte, nebſt dem Drucke ap gegen die obere Endfläche bei G, nachundnach bis zur unteren Endfläche bei H fortpflanzen, und daß daſelbſt die Summe aller dieſer Kräfte dem Drucke aq das Gleichgewicht halten muß.

Nehmen wir an, die Länge einer jeden dieſer Polygonſeiten ſei gleich dem Längenelemente ds der krummlinigen Axe GNH; ſo wird ein jedes, als geradlinig anzuſehendes Röhrenſtück N der Flüſſigkeit GNH ein Maſſenelement derſelben vom Inhalte ads und von der Maſſe μads bilden.

In dieſes Element wirkt in der Richtung SN, die Kraft $\mu fads$ oder in den Richtungen der drei rechtwinkligen Koordinaten Ox, Oy, Oz wirken auf daſſelbe die drei Kräfte $\mu f_1 ads$, $\mu f_2 ads$, $\mu f_3 ads$. Bezeichnet man die Neigungswinkel der Axe der Röhre bei N gegen jene drei Koordinatenaxen reſp. mit ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3; ſo ſind die Komponenten der vorſtehenden drei Kräfte in paralleler Richtung zur Axe der Röhre reſp. $\mu f_1 ads.\cos\vartheta_1$, $\mu f_2 ads.\cos\vartheta_2$, $\mu f_3 ads.\cos\vartheta_3$ oder da $ds.\cos\vartheta_1 = dx$, $ds.\cos\vartheta_2 = dy$, $ds.\cos\vartheta_3 = dz$ iſt, reſp. $\mu f_1 adx$, $\mu f_2 ady$, $\mu f_3 adz$; die geſammte in der Richtung der Röhrenaxe auf das Element N wirkende Kraft iſt alſo

$$\mu f_1 adx + \mu f_2 ady + \mu f_3 adz = a\mu(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz).$$

Da von den drei Koordinaten x, y, z, welche die Lage des Punktes N der Axe GNQ bezeichnen, nur eine einzige, z. B. x, unabhängig veränderlich iſt, die übrigen beiden y und z aber Funktionen der erſteren ſind; ſo ſtellt der ganze vorſtehende Ausdruck, wenn man darin für y und z ihre Werthe in x ſubſtituirt, nur eine Funktion von x dar. Wie vorhin erwähnt, muß die Summe aller ähnlichen Kräfte, welche in die verſchiedenen Maſſenelemente der Flüſſigkeit GNH wirken, plus dem Drucke ap, gleich dem Drucke aq ſein. Bezeichnet man daher die Abſziſſe oder den Werth von x für die Punkte G und H reſp. mit x_1 und x_2; ſo wird die ebengedachte Summe gleich

$$\int_{x_1}^{x_2} a\mu(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz),$$ oder da a konſtant, μ, f_1, f_2, f_3

aber veränderliche von x, y, z abhängige Größen sind, $a\int_{x_1}^{x_2}\mu(f_1\,dx+f_2\,dy+f_3\,dz)$. Hiernach erhält man zur Bestimmung des Druckes q auf die Flächeneinheit im Punkte H

$$aq=ap+a\int_{x_1}^{x_2}\mu(f_1\,dx+f_2\,dy+f_3\,dz)$$

oder

$$q=p+\int_{x_1}^{x_2}\mu(f_1dx+f_2dy+f_3dz) \quad \ldots\ldots (12)$$

Da die Größen μ, f_1, f_2, f_3 von x, y, z, die beiden Koordinaten y und z aber von x abhängig sind, so ist das zweite Glied auf der rechten Seite in vorstehender Gleichung das gewöhnliche Integral einer Funktion mit Einer veränderlichen Größe x. Die Integration kann bewerkstelligt werden, sobald man für μ, f_1, f_2, f_3 ihre Werthe in x, y, z und alsdann für y und z ihre Werthe in x substituirt. Man bemerkt, daß die Abhängigkeit, in welcher die drei Größen x, y, z voreinander stehen, aus der Natur der Gleichungen fließt, welche man für den krummen Weg GNH aufgestellt hat, auf welchem sich der Druck durch die gegebene Flüssigkeit vom Punkte G bis zum Punkte H fortpflanzen soll. Sobald dieser Weg und damit jene Abhängigkeit der Größen x, y, z gegeben ist, bildet der Ausdruck $\mu(f_1\,dx+f_2\,dy+f_3\,dz)$ immer eine integrabele Funktion der Einen Veränderlichen x. Der Weg GNH ist jedoch a priori durch Nichts gegeben, und man könnte für denselben einen jeden beliebigen anderen zwischen G und H liegenden Zug an die Stelle setzen und davon annehmen, daß die Fortflanzung des Druckes in der Flüssigkeit längs desselben erfolgte. Auf einem jeden dieser unendlich verschiedenen Wege muß sich, wenn die den Massentheilchen innewohnenden Kräfte überhaupt im Stande sein sollen, die Flüssigkeit im Gleichgewichte zu erhalten, im Punkte H genau derselbe Druck q ergeben, sodaß, wenn man die Koordinaten der beiden Endpunkte G und H resp. mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 bezeichnet, der Druck q stets dieselbe Funktion von

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ und den übrigen in μ, f_1, f_2, f_3 enthaltenen konstanten Größen und vom konstanten Drucke p ist, wie willkürlich auch das Gesetz der Abhängigkeit zwischen den drei allgemeinen Koordinaten x, y, z eines Punktes N der Axe GNH angenommen sei. Diese Forderung setzt offenbar voraus, daß die Funktion $\mu(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$ integrabel sei, wenn man x, y und z als drei voneinander ganz unabhängige Größen ansieht. Aus der Integralrechnung, insbesondere aus den Regeln für die Integration von Funktionen mit drei unabhängig veränderlichen Größen weiß man, daß die letztere Bedingung nur erfüllt werden kann, wenn $\mu(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$ das vollständige Differenzial einer Funktion der drei unabhängig Veränderlichen x, y, z oder wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\mu f_1)}{dy} &= \frac{d(\mu f_2)}{dx}, \quad \frac{d(\mu f_1)}{dz} = \frac{d(\mu f_3)}{dx}, \\ \frac{d(\mu f_2)}{dz} &= \frac{d(\mu f_3)}{dy} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (13)$$

ist.

Für den Fall, daß es sich um eine gleichartige unpreßbare Flüssigkeit handelte, für welche die Dichtigkeit μ in allen Punkten konstant wäre, reduzirten sich die vorstehenden Bedingungen auf

$$\frac{df_1}{dy} = \frac{df_2}{dx}, \quad \frac{df_1}{dz} = \frac{df_3}{dx}, \quad \frac{df_2}{dz} = \frac{df_3}{dy} \qquad \ldots . (14)$$

Sobald die auf die Theilchen einer Flüssigkeit angebrachten Kräfte resp. den Bedingungen (13) oder (14) ein Genüge leisten, sind sie im Stande, die Flüssigkeit im Gleichgewichte zu erhalten; entgegengesetztenfalls ist Dies unmöglich.

Den Bedingungen (14) für unpeßbare Flüssikeiten wird ein Genüge geleistet, wenn die auf die Massentheilchen der Flüssigkeit wirkenden Kräfte nach festen Mittelpunkten gerichtet und Funktionen der Abstände der Theilchen von diesen Mittelpunkten sind; ferner, wenn jene Kräfte aus inneren Wirkungen hervorgehen, welche zwischen den verschiedenen Theilchen der Flüssigkeit ausgeübt werden, und Funktionen der Abstände dieser Theilchen von

einander sind *). Die Wirkung der meisten Naturkräfte ist von Einer der beiden vorstehenden Arten.

§. 6. Bestimmung der Richtungslinie der sollizitirenden Kraft und der Flächen von gleichem Niveau in einer Flüssigkeit.

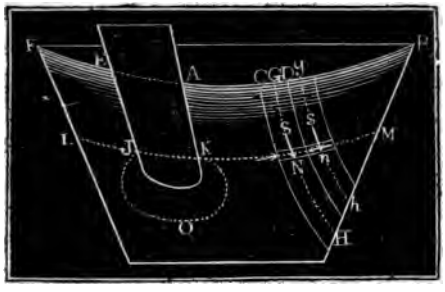
Auf das bei N befindliche Element der flüssigen Röhre GH wirken die beiden Pressungen der Säule GN und HN resp. normal gegen den oberen und unteren Querschnitt, ferner die Kraft $\mu f a d s$ in der Richtung SN, welche sich in die beiden Komponenten $\mu f a \cos\vartheta . ds$ und $\mu f a \sin\vartheta . ds$ resp. in paralleler und normaler Richtung zur Axe bei N zerlegen läßt, und endlich die Pressungen der umgebenden Flüssigkeit rings um die zylindrischen Umfangswände jenes Elementes in normaler Richtung zu diesen Wänden oder zu der Axe bei N.

Betrachten wir jetzt die normal gegen die Axe bei N gerichteten Kräfte, mit Einschluß der Komponente $\mu f a \sin\vartheta . ds$; so haben wir schon früher gesehen, daß sich dieselben für sich im Gleichgewichte erhalten müssen. Da nun zu diesem Gleichgewichte die Komponente $\mu f a \sin\vartheta . ds$ erforderlich ist; so folgt, daß die Pressungen der umgebenden Flüssigkeit in normaler Richtung zur Axe GNH im Punkte N für sich allein nicht würden im Gleichgewichte sein können, sobald man dem Elemente N nur irgend eine Ausdehnung in dieser normalen Richtung zuschriebe, oder sobald man den Querschnitt a der Röhre GNH nur von irgend einer Größe annähme, indem die Pressungen der äußeren Flüssigkeit gegen die linke Seite der zylindrischen Wand jenes Elementes (nach der obigen Zeichnung) schwächer sein müßten, als die gegen die rechte Seite. Wollte man nun die Variationen betrachten, welche der hydrostatische Druck im Inneren der

*) S. Navier. Résumé des leçons d'analyse et de mécanique données à l'Ecole polytechnique, No. 337.

Flüſſigkeit erleidet, wenn man vom Punkte N aus in einer Fläche fortſchreitet, welche auf der Axe der Röhre GNH bei N perpendikular ſteht; ſo leuchtet ein, das man die Ausdehnung des Elementes N in der Richtung jener Fläche oder den Querſchnitt a der Röhre GNH zwar ſo klein, als es beliebt, aber doch nicht gleich null annehmen dürfe, und daß man daher bei einem Fortſchritte in normaler Richtung zu der Axe bei N eine Fläche erhalten würde, in welcher der Druck der Flüſſigkeit links vom Punkte N ſchwächer und rechts von dieſem Punkte ſtärker werden würde.

Gäbe man nun aber der Axe der Röhre GH im Punkte N eine ſolche Richtung, daß ſie mit der Richtung SN der Kraft



$\mu fads$ zuſammenfiele, daß alſo $\vartheta = o$ und $\sin\vartheta = o$, mithin auch die Komponente $\mu f a \sin\vartheta . ds$ jener Kraft in normaler Richtung zur Axe gleich null würde; ſo folgt, daß ſich alsdann die Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit gegen die zylindriſchen Wände des Elementes N (und zwar in der unteren Kante desſelben) für ſich allein im Gleichgewichte erhalten werden. Zu dieſem Gleichgewichte iſt es erforderlich, daß alle Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit auf die verſchiedenen Punkte der zylindriſchen Oberfläche des Elementes N in der unteren Kante einander, und außerdem dem Drucke gleich ſeien, welcher ſich gegen die untere ebene Begränzungsfläche des unendlich kleinen Elementes N äußert. Denn aus §. 4 geht hervor, daß der Druck in jedem Punkte einer Flüſſigkeit nach allen Richtungen um denſelben herum gleich groß ſein müſſe. Bezeichnet man nun den Druck für die Flächeneinheit auf die obere ebene Begrän-

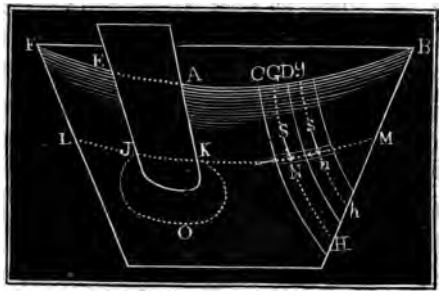
zungsfläche des Elementes N mit q'; so wird der Gesammtdruck, welchen jene Fläche in normaler Richtung empfängt, gleich aq' und der Druck in der unteren ebenen Begränzungsfläche $= aq' + \mu fads$ oder für jede Flächeneinheit diese Fläche $= q' + \mu fds$ sein, weil der Annahme gemäß die Axe des Elementes N mit der Richtung der Kraft $\mu fads$ zusammenfällt. Denselben Druck $q' + \mu fds$ muß nun auch die umgebende Flüssigkeit gegen die untere Kante des Elementes N in normaler Richtung zu dessen Axe ganz allein äußern, weil sich zu diesem Drucke keine Komponente der in das Element N wirkenden Kraft $\mu afds$ gesellt, um das Gleichgewicht in normaler Richtung zur Axe herzustellen.

Wenngleich das Glied μfds im Vergleich zu q' unendlich klein ist, und vollkommen verschwindet, sobald die Höhe ds des Elementes N auf null reduzirt wird; so leuchtet doch ein, wie wesentlich bei der vorstehenden Betrachtung die Berücksichtigung desselben, sowie die Berücksichtigung des Umstandes war, daß keine, wennauch unendlich kleine Komponente desselben, zu dem endlichen Seitendrucke der umgebenden Flüssigkeit trat, um das Gleichgewicht in normaler Richtung zur Axe des Elementes N aufrecht zu erhalten, da es hier die Absicht ist, die Lage einer Fläche weiterzuverfolgen, in welcher überall derselbe Druck, wie im Punkte N, herrscht, wobei es sich ereignen würde, daß bei einer endlichen Entfernung vom Punkte N die Differenz zwischen den Pressungen der Flüssigkeit von verschiedenen Seiten gegen die Seitenwände des Elementes N wegen einer unendlichen Wiederholung eines unendlich kleinen Unterschiedes zuletzt einen endlichen Werth annähme.

Reihet man an das vorhin betrachtete Element N oberhalb und unterhalb ein anderes an, dessen Axe wiederum mit der Richtung der demselben innewohnenden Kraft zusammenfällt, und fährt man in dieser Weise fort, bis man entweder die freie Oberfläche der Flüssigkeit oder die Gefäßwand erreicht; so erhält man eine im allgemeinen gekrümmte Flüssigkeitssäule GNH, deren Axe in allen Punkten mit den Richtungen der Kräfte zusammenfällt, von denen die dort befindlichen Massentheilchen belebt sind. Wenn alle diese Kräfte nach derselben Seite der Axe GNH, z. B. von G nach H wirken; so ergibt eine geeignete Addition derselben zueinander und zu dem auf die freie Ober-

fläche bei G angebrachten Drucke den in H ſtattfindenden Druck, und man erkennt allgemein, daß in jedem weiter von G in der Richtung GNH abſtehenden Punkte der Druck der Flüſſigkeit ein ſtärkerer ſein muß. Eine Linie, wie GH, welche als eine ſtetige Kurve durch die Lage ihrer Tangenten die Richtungen der in die ſukzeſſiven Maſſentheilchen der Flüſſigkeit wirkenden Kräfte darſtellt, wollen wir eine Richtungslinie der ſollizitirenden Kraft für einen gegebenen Punkt G, N oder H nennen.

Schreiten wir vom Punkte N in Richtungen weiter, welche auf der Axe GNH normal ſtehen; ſo haben wir ſchon geſehen,



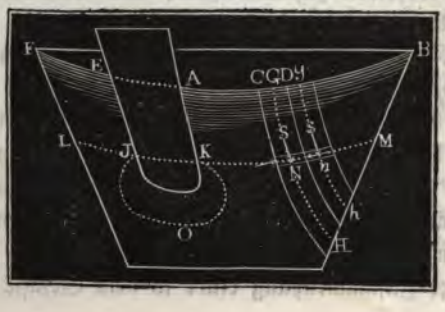
daß alsdann der hydroſtaſche Druck der Flüſſigkeit in der nächſten Umgebung um den Punkt N konſtant $= q'$ bleibt. Iſt nun *gnh* eine der GNH ähnliche und dieſelbe berührende Röhre von unendlich kleinem Querſchnitte, deren Axe eine benachbarte Richtungslinie der ſollizitirenden Kraft bildet; ſo iſt nach den anfänglichen Betrachtungen dieſes Paragraphes leicht einzuſehen, daß weil die Richtung der in das Element *n* wirkenden Kraft mit der Axe desſelben zuſammenfällt, und weil der Seitendruck bei *n* gegen die Röhre *gnh* von der Röhre GNH her gleich q' iſt, der hydroſtatiſche Druck rings um den normalen Querſchnitt bei *n* gleich q' ſein müſſe.

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit, daß in allen Punkten einer Fläche LNM, welche überall auf den Richtungslinien der ſollizitirenden Kraft normal ſteht, derſelbe hydroſtatiſche Druck herrſcht. Flächen von der vorſtehenden Beſchaffenheit heißen Flächen von gleichem Niveau.

Wenn der Zuſammenhang einer in dem Gefäße FH enthal-

tenen homogenen Flüssigkeit an einigen Stellen durch Zwischenwände EJKA unterbrochen ist, so jedoch, daß alle Theile der ganzen flüssigen Masse auf irgend einem Wege miteinander in Verbindung stehen; so werden diejenigen Flächen von gleichem Niveau, wie LNM, welche gegen jene Zwischenwände treffen, von Letzteren unterbrochen; die getrennten Theile LJ und KM jener Flächen gehörigen übrigens zu Ein und derselben stetigen Fläche von gleichem Niveau, welche man erhalten würde, wenn die Zwischenwände gar nicht vorhanden wären und der leere Zwischenraum zwischen denselben von einer gleichartigen, denselben Kräften unterworfenen Flüssigkeit erfüllt wäre. Denn da sich nach §. 5 der Druck in einer Flüssigkeit zwischen irgend zwei Punkten immer auf dieselbe Weise fortpflanzt, auf welchem Wege man auch seine Fortpflanzung verfolgen möge; so würde man, vom Punkte K bis zum Punkte J schreitend, immer nur dasselbe Resultat für den Druck bei J erhalten können, man möchte nun einen Weg, wie KOJ, um die Zwischenwände herum, oder einen direkten Weg, wie KJ, durch eine gleichartige flüssige Masse EJKA einschlagen. Für den Fall aber, wo die Zwischenwände nicht vorhanden und der innere Raum derselben mit einer ähnlichen Flüssigkeit erfüllt wäre, würde KJL die stetige Fortsetzung der Fläche MNK sein. Demnach wird auch bei vorhandenen Zwischenwänden JL die durch diese Wände unterbrochene Erweiterung der Fläche MNK sein. Das Vorstehende findet besonders bei homogenen Flüssigkeiten Anwendung, welche in kommunizirenden Röhren enthalten sind.

Wenn eine flüssige Masse nicht nach allen Seiten von Gefäßwänden begränzt ist, sondern an einigen Stellen eine freie



Oberfläche FE, AGB darbietet, auf welche sich in normalen Richtungen überall der konstante Druck p äußert; so bildet jene Oberfläche, in welcher der Druck p herrscht, offenbar eine Fläche von gleichem Niveau, d. h. dieselbe steht in allen Punkten normal auf den Richtungen der Kräfte, welche in die obersten Massentheilchen der Flüssigkeit wirken. Dies leuchtet ein, wenn man sich die Oberfläche als eine materielle Schicht der Flüssigkeit von unendlich geringer Stärke denkt und die Fortpflanzung des Druckes von dem Einen Elemente derselben zu dem anderen in derselben Weise betrachtet, wie Solches bei der Fläche LJKNM von gleichem Niveau geschehen ist.

Was vorhin von der Richtung der Flächen von gleichem Niveau im Allgemeinen gesagt ist, wenn dieselben durch Zwischenwände unterbrochen werden, gilt hiernach auch von der Erstreckung der freien Oberfläche unter ähnlichen Umständen.

§. 7. Dichtigkeit einer Flüssigkeit in den verschiedenen Flächen von gleichem Niveau.

Das Wesen der meisten Naturkräfte ist, wie bereits in §. 5 bemerkt worden, von der Art, daß durch sie die Gleichungen (14) erfüllt werden, sodaß bei einer Flüssigkeit, welche diesen Kräften unterworfen ist, die Funktion $f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ aus Gleichung (12) das vollständige Differenzial einer Funktion der drei unabhängig veränderlichen Größen x, y, z wird. Bezeichnet man diese Funktion mit Π; so hat man

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = d\Pi, \qquad \ldots\ (14^a)$$

und daher wegen Gleichung (12) für den Druck q in irgend einem Punkte der Flüssigkeit

$$q = p + \int \mu d\Pi \qquad \ldots\ (15)$$

oder auch für das Differenzial dieses Druckes, da p eine konstante Größe ist,

$$dq = \mu d\Pi \qquad \ldots\ (16)$$

Für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit ist es nun nach §. 5 nothwendig, daß $\mu(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz)$ oder $\mu d\Pi$ das voll-

ständige Differenzial einer Funktion von x, y, z sei, was nur dann möglich ist, wenn μ eine Funktion von Π ist (wobei auch μ konstant sein kann). Da sich nun nach Gleichung (15) q als Funktion von Π ergibt, Π aber auch Funktion von μ ist; so folgt, daß auch q eine Funktion von μ sein wird. Diese beiden Größen q und μ werden sich daher gleichzeitig ändern oder gleichzeitig konstant bleiben, wenn man von Einem Punkte der Flüssigkeit zu einem anderen übergeht. Das Gleichgewicht erfordert also, daß die Dichtigkeit mit dem Drucke in der ganzen Ausdehnung einer Fläche von gleichem Niveau konstant sei. Wenn demnach die Theile einer Flüssigkeit nicht sämmtlich einerlei Dichtigkeit haben; so lagern sie sich, wenn sie sich unter der Einwirkung beliebiger Kräfte ins Gleichgewicht setzen, dergestalt gegen einander, daß die Theilchen, deren Dichtigkeit dieselbe ist, Schichten bilden, welche durch die Flächen von gleichem Niveau getrennt sind. Diese Lagerung ist nothwendig, damit das Gleichgewicht bestehen kann.

Bei einer heterogenen unpreßbaren Flüssigkeit, z. B. näherungsweise bei einer Mischung von Öl, Wasser und Quecksilber, kann das Gleichgewicht bestehen, welches auch das Gesetz sei, nach welchem die Dichtigkeit von der Einen Schicht von gleichem Niveau (in deren Punkten die Dichtigkeit überall gleich ist) zu der anderen übergeht. Man muß hierbei nur bemerken, daß das Gleichgewicht nicht stabil sein wird, wenn die Schichten der Flüssigkeit nicht so geordnet sind, daß die dichtesten den Mittelpunkten zunächst liegen, von welchen die auf die Theilchen der Flüssigkeit wirkenden Anziehungskräfte ausgehen.

Bei einer homogenen elastischen Flüssigkeit, wo die Dichtigkeit mit dem Drucke proportional angenommen wird, ist das Gesetz bestimmt, nach welchem die Dichtigkeit von der Einen Schicht von gleichem Niveau zu der anderen sich ändert, denn wenn man

$$q = k\mu \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{q}{k} \qquad \ldots\ (17)$$

setzt, worin k einen konstanten Faktor bezeichnet; so wird die Gleichung (16)

$$\frac{dq}{q} = \frac{d\Pi}{k}.$$

Hieraus folgt durch Integration statt der Gleichung (15)

$$q = A.e^{\frac{\Pi}{k}} \qquad \ldots\ldots (18)$$

und daher wegen der obigen Beziehung

$$\mu = \frac{A}{k}.e^{\frac{\Pi}{k}}, \qquad \ldots\ldots (19)$$

worin A eine willkürliche Konstante und e die Basis der natürlichen Logarithmen darstellt.

§. 8. Einfluß der Temperatur auf den Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit.

Bei den elastischen Flüssigkeiten in der Natur ist die Dichtigkeit μ eine Funktion von der Temperatur, welche in der Flüssigkeit an der betrachteten Stelle herrscht, und von dem daselbst stattfindenden Drucke q. Da das Gleichgewicht erfordert, daß die rechte Seite der Gleichung $dq = \mu d\Pi$ ein vollständiges Integral sei; so muß μ eine Funktion von Π, oder umgekehrt, Π eine Funktion von μ sein. Jene Gleichung ergibt durch Integration das Gesetz der Pressungen q, aus welchem man alsdann wegen der Beziehung zwischen μ und q das Gesetz der Dichtigkeiten ableitet. Beide ebenerwähnten Gesetze werden für die einfachen Voraussetzungen des vorhergehenden Paragraphes resp. durch die Formeln (18) und (19) dargestellt, während (17) die Beziehung zwischen μ und q ausdrückt. Da nun μ eine Funktion der Temperatur ist; so wird es auch q sein, und hieraus schließt man, daß Druck und Temperatur im Inneren der Flüssigkeit gleichzeitig konstant sein und sich gleichzeitig ändern werden.

Das Gleichgewicht kann also in einer elastischen Flüssigkeit nicht bestehen, wenn die Temperatur nicht in allen Punkten Ein und derselben Fläche von gleichem Niveau gleichförmig ist.

In der Wirklichkeit findet dieser Satz auch auf die gemeinlich so genannten unpreßbaren Flüssigkeiten Anwendung, weil sich ihre Dichtigkeit immer mit der Temperatur ein wenig ändert, und hieraus erklären sich die Bewegungen, welche die Theilchen einer solchen Flüssigkeit durch die bloße Wirkung einer ungleichmäßigen Vertheilung der Temperatur annehmen.

II. Das Gleichgewicht der schweren unpreßbaren Flüssigkeiten.

Beziehungen zwischen den auf eine unpreßbare Flüssigkeit wirkenden Kräften, den inneren Pressungen und den Flächen von gleichem Niveau.

§. 9. Bestimmung des Druckes in irgend einem Punkte einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit.

In einem rings herum verschlossenen Gefäße **AB** sei eine gleichartige unpreßbare Flüssigkeit enthalten, auf deren einzelne Massentheilchen die Schwere einwirkt. Die Schwere wird als eine Kraft angesehen, deren Wirkung auf die verschiedenen Theilchen jener Flüssigkeit sich in parallelen und zwar in vertikalen Richtungen von oben nach unten äußert. Die Intensität dieser Kraft ist ebenfalls für alle Massentheilchen gleich, und zwar ist sie so groß, daß sie der Materie; auf welche sie frei wirkt, eine Geschwindigkeit von

$g = 31{,}2644$ Fuß rheinl. in der Sekunde mittheilt, oder daß sie, auf eine Volumeinheit der gegebenen Flüssigkeit einwirkend, wenn dieselbe durch eine feste Unterlage in Ruhe erhalten wird, einen Druck von

$w = \mu g$ Gewichtseinheiten auf jene Unterlage ausübt, sodaß also w das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit darstellt, während μ die konstante Dichtigkeit oder die in der Volumeinheit enthaltene Masse der Flüssigkeit bezeichnet. (S. §. 2.)

Es wird ferner angenommen, daß sich im höchsten Punkte A des Gefäßes, etwa vermittelst eines Stempels, ein Druck auf die Flüssigkeit äußere, dessen Betrag für die Flächeneinheit gleich p ist. Im Übrigen werden die Bezeichnungen aus §. 4 beibehalten.

Um den Druck q in einem Punkte C der Flüssigkeit zu bestimmen, sei AC eine von A nach C führende geradlinige Röhre von unendlich kleinem Querschnitte a, welche sich unter dem Winkel $CAH=\gamma$ gegen die Vertikale neige. Die Wirkung der Schwere auf das bei N befindliche Element dieser Röhre von dem Volum ads und der Masse μads ist $\mu g ads$, oder wenn man für das Gewicht μg der Volumeinheit der Flüssigkeit das Zeichen w einführt, $wads$. Die Richtung SN dieser Kraft neigt sich gegen die Linie AN unter dem Winkel $SNA=NAH=\gamma$; man hat also in Gleichung (11) γ für ϑ zu substituiren, wodurch sich ergibt

$$q=p+\int_0^{s_1} w\cos\gamma\, ds,$$

oder da w und γ konstante Größen sind,

$$q=p+w\cos\gamma\int_0^{s_1} ds=p+ws_1\cos\gamma \qquad \ldots\ (20)$$

Legt man durch C eine Horizontalebene, welche die Vertikale AH in H durchschneidet, und bezeichnet den Abstand AH dieser Ebene vom Punkte A mit h; so ist $s_1\cos\gamma=h$ und der vorstehende Werth des im Punkte C stattfindenden Druckes für die Flächeneinheit reduzirt sich auf

$$q=p+wh \qquad \ldots\ (21)$$

Dieser Ausdruck, in welchem p den bei A stattfindenden Druck und wh das Gewicht einer Flüssigkeitssäule von Einer Flächeneinheit Grundfläche und von einer Höhe $AH=h$ darstellt, ist von der Richtung der Linie AC ganz unabhängig und hängt nur von der vertikalen Tiefe ab, in welcher der Punkt C unter A liegt.

Denkt man sich, um den Druck q_1 im Punkte C_1 zu bestimmen, von C nach C_1 die gerade Linie CC_1 gezogen und durch C_1 eine Horizontalebene gelegt, welche die Vertikale AH in H_1 durchschneidet; so erhält man, wie vorhin, wenn man $HH_1=h_1$ setzt,

$$q_1 = q + wh_1,$$

d. i. wegen Gleichung (21)

$$q_1 = p + wh + wh_1 = p + w(h + h_1).$$

Denſelben Werth würde man für q_1 erhalten, wenn man annähme, der Druck pflanzte ſich direkt vom Punkte A bis zum Punkte C_1 in der geraden Linie AC_1 fort. Hiernach kann man ſich vorſtellen, die Fortpflanzung des Druckes von A bis C_1 gehe in der geraden Linie AC_1 oder in jeder anderen, Ein Mal gebrochenen Linie ACC_1 vor ſich. Da ſich hiernach auch der Druck zwiſchen A und C in der geraden Linie AC, wie in jeder anderen Ein Mal gebrochenen Linie fortpflanzt, der Punkt C zwiſchen A und C_1 aber ganz beliebig angenommen werden konnte; ſo folgt, daß die Fortpflanzung des Druckes zwiſchen A und C_1 oder zwiſchen irgend zwei anderen Punkten der Flüſſigkeit ganz in derſelben Weiſe vor ſich geht, man mag ſich den Weg derſelben nun geradlinig oder Einmal, zweimal, allgemein n mal gebrochen und von willkürlicher Lage und Form vorſtellen. Man ſieht, daß hierdurch die Bedingung des §s 5 erfüllt wird, unter welcher es überhaupt nur möglich war, daß die Flüſſigkeit unter der Wirkung der ſie ſollizitirenden Kraft, hier der Schwerkraft, im Gleichgewichte erhalten würde. Die analytiſchen Ausdrücke (14) für dieſe Bedingung würden ſich hier, wenn man die Vertikale AH als die Axe der z und eine durch A gelegte Horizontalebene als Ebene der xy annimmt, auf die beiden

$$\frac{df_3}{dx} = o \text{ und } \frac{df_3}{dy} = o$$

reduziren, da hier f_1 und $f_2 = o$ ſind. Dieſen Formeln wird aber in der That durch den konſtanten Werth $f_3 = g$ ein volles Genüge geleiſtet.

§. 10. Die Flächen von gleichem Niveau in einer ſchweren unpreßbaren Flüſſigkeit.

Aus Gleichung (21) folgt, daß der Druck in allen Punkten der Flüſſigkeit, welche in derſelben vertikalen Tiefe h unter A liegen, konſtant, und zwar gleich dem in A herrſchenden Drucke

p, plus dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule ist, deren Grundfläche eine Flächeneinheit beträgt und deren Höhe der Tiefe h gleich kommt. Die Flächen von gleichem Niveau in einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit sind demnach Horizontalebenen, was auch schon aus den allgemeinen Betrachtungen des §s 6 gefolgert werden konnte, da die Richtungslinien der sollizitirenden Kraft, auf welchen die Flächen von gleichem Niveau normal stehen müssen, hier lauter Vertikalen sind.

Wenn das Gefäß bei A offen wäre; so könnte der Druck p auf die Flächeneinheit der freien Oberfläche der Flüssigkeit durch die Spannung einer das Gefäß umgebenden elastischen Flüssigkeit hervorgebracht werden. Bei den meisten Erscheinungen in der Natur, wo fast immer die freie Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit mit der atmosphärischen Luft in Berührung ist, stellt das Glied p in der Gleichung (21) den atmosphärischen Druck auf die Flächeneinheit dar.

Befände sich die freie Oberfläche der Flüssigkeit im luftleeren Raume; so hätte man natürlich $p = o$ zu setzen.

Die Gestalt der freien Oberfläche ist, da dieselbe zu den Flächen von gleichem Niveau gehört, ebenfalls eine Horizontalebene, welche sich durch die verschiedenen Abtheilungen eines Gefäßes, in welchem die Flüssigkeit durch kommunizirende Behälter mehrere Zweige oder Abtheilungen bildet, in derselben Höhe fortsetzt.

In einem Gefäße, wo die Flüssigkeit eine freie, mit der Luft in Verbindung stehende Oberfläche bildet, ist daher der hydrostatische Druck in irgend einem Punkte gleich dem atmosphärischen Drucke, plus dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche die Flächeneinheit zur Grundfläche und den Abstand jenes Punktes von der freien Oberfläche zur Höhe hat.

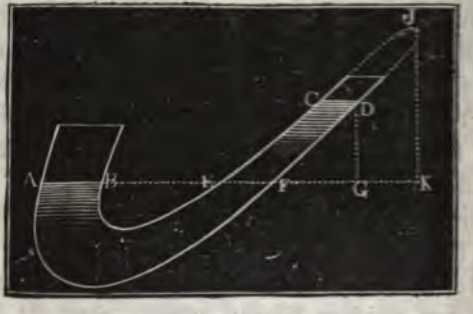
Der hydrostatische Druck in der freien Oberfläche der Flüssigkeit selbst ist gleich p, d. h. gleich dem atmosphärischen Drucke, wenn jene Fläche mit der äußeren Luft in Berührung steht.

§. 11. Fall, wo die Flüssigkeit eine nicht zusammenhängende freie Oberfläche bildet, auf deren gerennte Theile verschiedene äußere Druckkräfte wirken.

Im Wesentlichen wird dieser Fall von den früher betrachteten

nicht verschieden sein, wenn man bedenkt, daß man sich einen jeden Theil der freien Oberfläche, welcher immer eine horizontale Fläche von gleichem Niveau bilden wird, ja nur wie irgend eine andere Fläche von gleichem Niveau, oder auch wie einen Theil der Gefäßwand, in welchem derselbe Druck herrscht, vorstellen könne, um alle Ergebnisse der obigen Untersuchungen darauf anzuwenden.

Bestände z. B. das Gefäß ABCD aus zwei Schenkeln, in welchen die Flüssigkeit die beiden horizontalen Oberflächen AB



und CD bildete, und äußerte sich auf die Fläche AB der Druck p, auf die Fläche CD aber der kleinere Druck p_1, so würde sich die Fläche CD in dem zweiten Schenkel höher stellen, als die Fläche AB im ersten Schenkel, und zwar um eine Höhe H, welche sich folgendermaaßen findet.

Wenn EF die Erweiterung der Fläche AB ist; so wird ABEF diejenige Fläche von gleichem Niveau sein, in welcher der Druck p herrscht. Da nun der vertikale Abstand DG der Flächen CD und EF gleich H ist; so hat man auch für den Druck in der Fläche EF den Werth $p_1 + w\mathrm{H}$; mithin

$$p = p_1 + w\mathrm{H}$$

oder

$$\mathrm{H} = \frac{p - p_1}{w} \qquad \ldots . \ (22)$$

Der Druck q in irgend einem Punkte der Flüssigkeit ist stets durch die Formel (21) dargestellt. Will man darin die Höhe h von der Oberfläche AB aus messen; so ist natürlich h negativ

zu nehmen, wenn der fragliche Punkt über der Ebene ABEF, also in der Masse EFDC liegt. Für den Druck in einem solchen Punkte, der um h über EF läge, würde man also

$$q = p - wh \qquad \ldots\ (23)$$

haben. Der Wechsel des Zeichens von h in der letzteren Formel erklärt sich sehr leicht, wenn man beachtet, daß bei dem Aufsteigen von irgend einem Punkte einer schweren Flüssigkeit zu einem höher belegenen, die Schwerkraft in Beziehung zu dem eingeschlagenen Wege in einer Richtung wirkt, welche der in § 9 angenommenen direkt entgegengesetzt ist, also jetzt in demselben Maaße zur Verminderung des Druckes beiträgt, wie sie vorher zur Vermehrung desselben beitragen mußte.

Wollte man jedoch die Lage irgend eines Punktes, für welchen der Druck der Flüssigkeit gesucht wird, durch die vertikale Tiefe h_1 bestimmen, in welcher er unterhalb der Fläche CD liegt; so findet man jenen Druck nach Analogie der Formel (21) durch die Gleichung

$$q = p_1 + w h_1.$$

Wenn der Druck p_1 auf die Fläche CD gleich null wäre; so würde die Höhe DG = H der Flüssigkeitssäule CDFE, welche in dem rechten Schenkel über dem Niveau AB des Spiegels im linken Schenkel steht, nach Gleichung (22)

$$H = \frac{p}{w} \qquad \ldots\ (24)$$

sein. Ein solcher Fall wird offenbar hervorgebracht, wenn der rechte Schenkel des Gefäßes oben bei J ganz geschlossen und luftleer ist, während auf den Spiegel AB der Druck p der atmosphärischen Luft wirkt.

Wäre unter diesen Umständen die Flüssigkeit z. B. Quecksilber, wovon der Kubikfuß nahezu $w = 896$ ℔ wiegt, und betrüge der atmosphärische Druck auf den Spiegel AB des offenen Schenkels für den Quadratfuß $p = 2091$ ℔ (oder für den Quadratzoll etwa 14,52 ℔), was dem mittleren Drucke der Atmosphäre in unseren Gegenden entspricht; so würde

$$H = \frac{2091}{896} = 2{,}333 \text{ Fuß} = 28 \text{ Zoll} \quad \ldots\ (25)$$

sein. Das ganze Gefäß stellt alsdann das bekannte Quecksilberbarometer dar.

Wäre die Flüssigkeit dagegen Wasser, wovon der Kubikfuß $w = 66$ ℔ wiegt; so würde bei demselben atmosphärischen Drucke auf AB

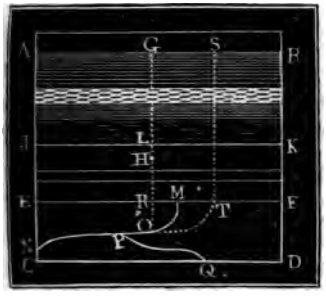
$$H = \frac{2091}{66} = 31{,}682 \text{ Fuß} \quad \ldots\ (26)$$

sein.

Wenn in den zuletzt betrachteten Fällen der Schenkel EFJ bei J geschlossen ist, die vertikale Höhe KJ seines höchsten Punktes über dem Niveau von AB aber kleiner ist, als der aus der Formel (24) für H sich ergebende Werth; so leuchtet ein, daß die Flüssigkeit den ganzen Schenkel erfüllen und im Punkte J einen hydrostatischen Druck q ausüben wird, welchen man aus Gleichung (23) erhält, wenn man darin $h = KJ$ setzt.

§. 12. Fall, wo sich in demselben Gefäße mehrere unpreßbare Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten befinden.

Aus der allgemeinen Betrachtung des §s 7 geht hervor, daß das Gleichgewicht in dem vorliegenden Falle nur dann bestehen kann, wenn sich die verschiedenen schweren unpreßbaren Flüssigkeiten, welche verschiedene Dichtigkeiten oder spezifische Gewichte besitzen, in Lagen übereinander schichten, welche durch Flächen von gleichem Niveau, d. i. durch Horizontalebenen getrennt sind, und in deren jeder sich nur Theile vorfinden, welche Ein und dieselbe Dichtigkeit besitzen. Auch wird dieses Gleichgewicht nur dann stabil sein, wenn die Lagen nach dem Grade der Dichtigkeit geordnet sind, sodaß immer die dichtesten die tiefsten Theile des Gefäßes einnehmen. Dieser Satz läßt sich in dem vorliegenden konkreten Falle, wo man es nur mit schweren unpreßbaren Flüssigkeiten zu thun hat, folgendermaaßen auf elementarem Wege darthun.



Angenommen, in dem Gefäße ABDC befinden ſich mehrere ſchwere unpreßbare Flüſſigkeiten, welche bereits in horizontale Schichten von der vorhin beſchriebenen Art abgelagert ſind. Es ſei

w_1, w_2, w_3 .... w reſp. das Gewicht einer Volumeinheit der 1ſten, 2ten, 3ten....nten Flüſſigkeit, von oben herab gerechnet,

h_1, h_2, h_3 .... die Höhen der 1ſten, 2ten, 3ten .... Schicht, welche dieſe Flüſſigkeiten einnehmen,

k die Höhe LH von der unteren Fläche der $(n-1)$ſten Schicht bis zu einem in der $n$ten Schicht liegenden Punkte H,

p der auf die freie Oberfläche AB ausgeübte Druck für jede Flächeneinheit,

q der im Punkte H ſtattfindende hydroſtatiſche Druck;

alsdann iſt nach dem Früheren leicht einzuſehen, daß

$$q = p + w_1 h_1 + w_2 h_2 + w_3 h_3 + \ldots + wh \qquad \ldots\ldots (27)$$

iſt.

Wäre nun EF die letzte Horizontalebene, nach welcher jene Schichten abgeſondert wären, und befänden ſich unter EF flüſſige Maſſen, deren Dichtigkeit in horizontaler Richtung verſchieden wäre, indem zwei benachbarte z. B. durch die Flächen MPN und NPQ begränzt wären; ſo leuchtet ein, daß wenn man $RO = h$ ſetzt, die Formel (27) auch den Druck im Punkte O darſtellen wird, ſobald man darin unter w das Gewicht einer Volumeinheit der Maſſe EMPN verſteht. Denkt man ſich jedoch die Fortpflanzung des Druckes von der Oberfläche AB bis zum Punkte O nach der Linie STO vor ſich gehend, und bezeichnet das Gewicht einer Volumeinheit der Maſſe FMPQD mit w'; ſo müßte auch

$$q = p + w_1 h_1 + w_2 h_2 + w_3 h_3 + \ldots + w' h,$$

alſo $w = w'$ ſein, d. h. die Dichtigkeit der beiden unmittelba

unter EF liegenden flüssigen Massen müßte in jeder horizontalen Linie gleich groß sein.

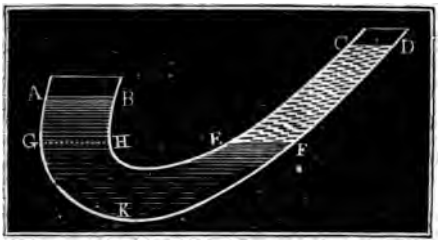
Da man das Vorstehende von jeder vorhergehenden Schicht hätte behaupten können, falls darin in horizontaler Richtung schon ein Wechsel der Dichtigkeiten stattgefunden hätte; so folgt, daß es zum Bestehen des Gleichgewichtes erforderlich ist, daß sich alle Flüssigkeiten vom Spiegel AB bis zum tiefsten Punkte des Gefäßbodens in horizontalen Schichten von gleichförmiger Dichtigkeit ablagern.

Daß das Gleichgewicht der verschiedenen in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeiten nur dann stabil sein könne, wenn sich die dichtesten oder spezifisch schwersten Schichten in den tiefsten Punkten des Gefäßes abgelagert haben, erkennt man auch leicht aus dem in der Mechanik der starren Körper dargethanen Satze, daß das Gleichgewicht eines beweglichen Systemes von schweren Körpern nur dann stabil sei, wenn der Schwerpunkt dieses Systemes die möglich tiefste Lage angenommen habe. Nun leuchtet ein, daß der Schwerpunkt der in Frage stehenden Flüssigkeiten dann am tiefsten liegt, wenn sich die dichtesten Schichten resp. dem Boden des Gefäßes am nächsten befinden. Denn solange es nur noch irgend zwei solcher Schichten gibt, von denen die weniger dichte tiefer, als die dichtere liegt, kann man durch den Austausch gleicher Volumen dieser beiden Schichten den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller Flüssigkeiten dem Boden des Gefäßes näher bringen.

Nachdem hierdurch die nothwendigen Bedingungen für das Gleichgewicht mehrerer in demselben Gefäße befindlicher Flüssigkeiten von verschiedenen spezifischen Gewichten festgestellt sind, ergibt die Formel (27) den in irgend einem Punkte der flüssigen Massen stattfindenden Druck auf die Flächeneinheit. Derselbe besteht aus zwei Theilen; nämlich aus dem Drucke p auf die Flächeneinheit der freien Oberfläche AB und dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die Flächeneinheit, deren Höhe $GH = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h$ ist, und welche in derselben Weise aus verschiedenen Schichten ungleicher Flüssigkeiten zusammen gesetzt ist, wie die über dem Punkte H im Gefäße ABDC befindliche Masse.

Wenn sich in einer aus zwei offenen Schenkeln bestehenden

Röhre ABCD zwei Flüssigkeiten BAKFE und EFCD von



verschiedenen Dichtigkeiten befinden, und EF die horizontale Berührungsebene beider ist; so sei

w und w_1 resp. das Gewicht Einer Volumeinheit der Massen BAKFE und EFCD, und es sei $w > w_1$,

H und H_1 resp. die vertikale Höhe des Spiegels AB über der Trennungsfläche EF oder über deren Erweiterung GH, und des Spiegels CD über derselben Trennungsfläche EF,

p der auf jede Flächeneinheit der Spiegel AB und CD wirkende äußere Druck.

Wegen der vorhergehenden Untersuchung wird der untere Theil K des Gefäßes von der spezifisch schwereren, also von Theilen der zuerst genannten Flüssigkeit angefüllt sein. Der in der Fläche GH oder EF stattfindende, durch die Flüssigkeit BAKFE hervorgebrachte Druck q ist alsdann

$$q = p + wH.$$

Vermöge der Flüssigkeit DCEF muß der Druck in jener Fläche EF aber auch

$$q = p + w_1 H_1$$

sein. Aus den vorstehenden beiden Gleichungen folgt

$$wH = w_1 H_1$$

oder

$$\frac{H}{H_1} = \frac{w_1}{w} \qquad \ldots\ (28)$$

Da zwischen den beiden Flüssigkeiten BAFE und EFDC Gleichgewicht besteht, und die Quantität HGKFE der ersteren

flüssigen Masse, welche durch die Theile GH und EF derselben Horizontalebene begränzt wird, für sich im Gleichgewichte ist; so halten sich auch die beiden Flüssigkeitssäulen ABHG und CDFE für sich im Gleichgewichte, und aus Gleichung (28) folgt, daß ihre vertikalen Höhen in umgekehrtem Verhältnisse zueinander stehen, wie die Gewichte ihrer Volumeinheiten oder wie ihre spezifischen Gewichte.

Bestimmung des Druckes einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit gegen gegebene Theile der Gefäßwände.

§ 13. Größe des Druckes auf ein bestimmtes Stück einer Fläche, gegen welche sich die Flüssigkeit stützt.

Unter der horizontalen Oberfläche einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit befinde sich eine Wand, deren geometrische Lage durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmt sei. Die Koordinatenebene der xy liege in der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit, und die Ordinaten z werden vertikal von oben nach unten gerechnet. Die Gleichung der fraglichen Fläche wird alsdann von der allgemeinen Form

$$z = F(x, y) \qquad \ldots\ (29)$$

sein. Auf dieser Fläche ist durch eine beliebige Kurve, deren Gleichungen

$$z = \varphi(y),\ z = \psi(x),\ y = \chi(x) \qquad \ldots\ (30)$$

seien, ein bestimmtes Stück A begränzt, und es wird verlangt, den Druck anzugeben, welchen die Flüssigkeit gegen dasselbe äußert. (Es braucht wol kaum bemerkt zu werden, daß wenn von den drei Gleichungen (30) Eine gegeben ist, die anderen beiden sich vermittelst der Gleichung (29) ableiten lassen.)

Bei vorläufiger Vernachlässigung des auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübten Druckes sei

w das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,
a irgend ein unendlich kleines Flächenelement der Fläche A,
α, β, γ resp. die Winkel, welche die Normale auf dem Elemente a mit den Axen der x, y, z einschließt, oder die Winkel, welche dieses Element selbst mit den Ebenen yz, xz, xy bildet,

dQ der Druck, welchen die Flüssigkeit in normaler Richtung gegen das Element a äußert,

dU, dV, dW die Komponenten dieses Druckes resp. in paralleler Richtung zu den Axen der x, der y und der z,

U, V, W resp. der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen die Fläche A in paralleler Richtung zu den Axen der x, der y und der z,

Q die mittlere Resultante der drei Kräfte U, V, W, falls sich dieselben in eine einzige Kraft zusammensetzen lassen.

Nach Gleichung (21) ist der hydrostatische Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit in dem Punkte, wo das Element a genommen ist, weil dessen vertikaler Abstand von der freien Oberfläche der Flüssigkeit $= z$ ist, wz, und demnach der normale Gesammtdruck auf jenes Element

$$dQ = wza \quad \ldots . \quad (31)$$

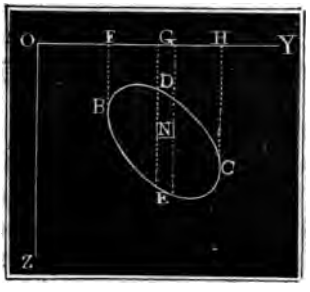
Die Komponenten dieses Druckes parallel zu den Axen der x, y, z sind resp.

$$dU = wza\cos\alpha,\ dV = wza\cos\beta,\ dW = wza\cos\gamma \ldots (32)$$

$a\cos\alpha$, $a\cos\beta$, $a\cos\gamma$ stellen offenbar die Projektionen des Elementes a auf die Ebenen yz, xz und xy dar: die Komponenten des elementaren Druckes dQ verhalten sich also zu diesem Drucke, wie die Projektionen des Elementes a zu der Fläche dieses Elementes selbst, und sind resp. gleich dem Drucke der Flüssigkeit auf die drei Projektionen jenes Elementes, wobei bei dem Drucke auf die horizontale Projektion $a\cos\gamma$ nur zu bemerken ist, daß dieselbe in der Tiefe z unter dem Spiegel der Flüssigkeit liegend gedacht werden muß, damit der Druck auf dieselbe gleich dem Gewichte der über derselben stehenden Flüssigkeitssäule sei. Da Dies von dem Drucke auf jedes beliebige Element der Fläche A gesagt werden kann; so folgt 1) daß der Gesammtdruck U der Flüssigkeit gegen die Fläche A in paralleler Richtung zur Axe der x sowol in Größe, wie in Richtung gleich sei dem Drucke, welchen dieselbe gegen die Projektion von A auf die Ebene yz ausüben würde; 2) daß der Gesammtdruck V der Flüssigkeit gegen die Fläche A in paralleler Richtung zur Axe y sowol in Größe, wie in Richtung gleich sei dem Drucke, welchen

dieselbe gegen die Projektion von A auf die Ebene xz ausüben würde; 3) daß der Gesammtdruck W der Flüssigkeit gegen die Fläche A in paralleler Richtung zur Axe z gleich dem Gewichte der vertikalen Flüssigkeitssäule sei, welche zwischen der Fläche A und der freien Oberfläche der Flüssigkeit liegt. Die Richtung dieses letzteren Druckes geht offenbar durch den Schwerpunkt der eben beschriebenen Flüssigkeitssäule.

§. 14. Aus dem Vorstehenden ersieht man, daß die Untersuchung der von einer gegebenen Fläche A auszuhaltenden Pressungen sich auf die Bestimmung der Pressungen reduzirt, welche eine in einer Vertikalebene gegebene ebene Fläche empfängt, und auf die Ermittelung des Gewichtes einer Flüssigkeitsmenge, deren Seitenlinien vertikal sind, deren obere Basis in der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit liegt, und deren untere Basis eine gegebene Fläche A bildet. Es sei daher



1) BDCE irgend eine ebene Figur in der Vertikalebene der yz, OY der Durchschnitt dieser Ebene mit der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit. Für irgend eine horizontale Abszisse $OG = y$ seien die beiden vertikalen Ordinaten GD und GE resp. z' und z'', und da dieselben Funktionen von y sind; so habe man allgemein

$$\left.\begin{aligned} z' &= \varphi'(y) \\ z'' &= \varphi''(y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (33)$$

Die Abszissen OF und OH des der Axe OZ am nächsten und von derselben am weitesten liegenden Punktes B und C seien resp. y_1 und y_2.

Für irgend ein rechtwinkliges Element N der gegebenen Fläche, dessen Breite dy und dessen Höhe dz, dessen Flächeninhalt also $dy.dz$ ist, und welches in der Tiefe z unter dem Spiegel OY liegt, beträgt der Druck der Flüssigkeit nach den Gleichungen (31) oder (32)

$$w z\, dy\, dz.$$

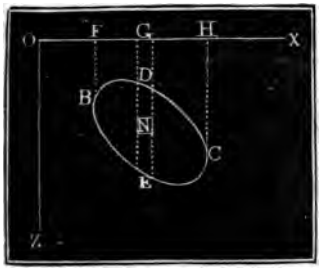
Für die ganzen vertikalen Streifen DE von der konstanten Breite dy besteht jener Druck aus der Summe aller Pressungen auf die verschiedenen in demselben liegenden Flächenelemente, und man hat daher für den Druck auf DE

$$w\,dy\int_{z'}^{z''} z\,dz = \tfrac{1}{2}w\,(z''^2 - z'^2)\,dy.$$

Die Summe der Pressungen auf alle derartige vertikale Streifen, welche zwischen den äußersten Punkten B und C der Fläche BDCE liegen, bildet den Gesammtdruck U der Flüssigkeit auf jene Fläche, und hieraus folgt

$$\mathrm{U} = \tfrac{1}{2}w\int_{y_1}^{y_2}(z''^2 - z'^2)\,dy \qquad \ldots\ (34)$$

Um die Integration dieses Ausdruckes auszuführen, sind darin natürlich für z' und z'' zuvörderst ihre Werthe in y aus den Gleichungen (33) zu substituiren.



2) Läge die Fläche BDCE in der Ebene der xz; so erhält man, wie vorhin, wenn man in der eben geführten Untersuchung y mit x vertauscht und allgemein für die Ordinaten GD $= z'$ und GE $= z''$ die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} z' &= \psi'(x) \\ z'' &= \psi''(x) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (35)$$

setzt, und die Abszissen OF und OH der äußersten Punkte B und C resp. mit x_1 und x_2 bezeichnet, für den Druck auf das Element N

$$w z\,dx\,dz,$$

ferner für den Druck auf den vertikalen Streifen DE

$$\tfrac{1}{2}w\,(z''^2 - z'^2)\,dx$$

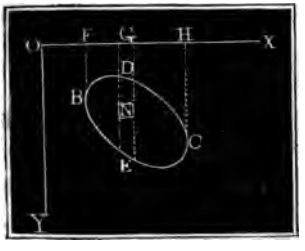
und endlich für den Gesammtdruck auf die Fläche BDCE

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_{x_1}^{x_2} (z''^2 - z'^2)\, dx \qquad \ldots\ldots (36)$$

3) Um endlich das Gewicht einer vertikalen Flüssigkeitssäule zu bestimmen, deren obere Basis in dem horizontalen Spiegel XY der Flüssigkeit liegt, und deren untere Basis das Stück A irgend einer Fläche ist; so sei die allgemeine Gleichung dieser Fläche

$$z = F(x, y), \qquad \ldots\ldots (37)$$

und wenn BDCE die Projektion des Flächenstückes A auf die horizontale Ebene XY ist; so sei für irgend eine Abszisse $OG = x$ die Eine Ordinate $GD = y'$ und die andere $GE = y''$, und man habe allgemein



$$\left.\begin{aligned} y' &= \chi'(x) \\ y'' &= \chi''(x) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (38)$$

Ferner sei die Abszisse des der Axe OY am nächsten liegenden Punktes B, also OF, gleich x_1 und die des entferntesten Punktes C, also OH, gleich x_2.

Wenn man sich das Flächenelement N der Projektion BDCE, dessen Länge und Breite resp. dx und dy, dessen Inhalt also $dx.dy$ ist, als die obere Basis eines vertikalen Prismas der Flüssigkeit denkt, dessen untere Basis das Element a der Fläche A und dessen Höhe $= z$ ist; so hat das Gewicht dieses Prismas oder die vertikale Komponente des Druckes auf a den Werth

$$wz\, dx\, dy.$$

Um die Summe aller Werthe dieses Ausdruckes für einen Streifen der Fläche A zu erhalten, welcher sich auf den Streifen DE von konstanter Breite dx projizirt, hat man in demselben, nachdem man zuvor für z seinen Werth aus Gleichung (37) gesetzt hat, $z = OG$ als eine konstante Größe zu betrachten, und denselben alsdann für y zwischen den Gränzen $GD = y'$ und $GE = y''$ zu integriren. Dies ergibt

$$w\,dx\int_{y'}^{y''} z\,dy.$$

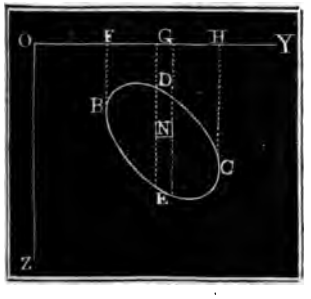
Die Summe aller vertikalen Preſſungen auf die verſchiedenen Streifen der vorſtehenden Art, deren Projektionen zwiſchen den Punkten B und C liegen, d. h. der Geſammtwerth des vertikalen Druckes W auf die Fläche A, wird erhalten, wenn man den letzteren Ausdruck für x, und zwar zwiſchen den Gränzen OF $=x_1$ und OH $=x_2$ integrirt. Demnach hat man

$$W = w\int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y'}^{y''} z\,dy \qquad \ldots\ (39)$$

§. 15. **Richtung des Druckes einer ſchweren unpreßbaren Flüſſigkeit gegen ein beſtimmtes Stück irgend einer Fläche.**

Um eine vollſtändige Kenntniß von der Wirkung einer ſchweren unpreßbaren Flüſſigkeit gegen das vorhin betrachtete Flächenſtück A zu erlangen, ſind noch die Abſtände zu ermitteln, in welchen die der Axe OX parallele Komponente U reſp. von der Ebene XY und XZ liegt; dieſe Abſtände heißen reſp. Z_1 und Y_1: ferner die Abſtände, in welchen die der Axe OY parallele Komponente V reſp. von der Ebene YX und YZ liegt; dieſe Abſtände heißen reſp. Z_2 und X_2: endlich die Abſtände, in welchen die der Axe OZ parallele Komponente W reſp. von der Ebene ZX und ZY liegen; dieſe Abſtände heißen reſp. Y_3 und X_3.

Zu dieſem Ende ſei



1) BDCE die Projektion der Fläche A auf die Ebene YZ. Der auf das Element N ausgeübte Druck iſt nach §. 14 $wz\,dy\,dz$, und weil der Abſtand dieſes Druckes von der Axe OY, nämlich GN $=z$ iſt; ſo hat man für das Moment desſelben in Beziehung zur Axe OY

$$wz\,dy\,dz \times z = wz^2\,dy\,dz,$$

alſo für die Summe der Momente

aller auf den Streifen DE wirkenden Preſſungen, für welche OG = y konſtant iſt,

$$w\,dy\int_{z'}^{z''} z^2\,dz = \tfrac{1}{2}w\,(z''^2 - z'^2)\,dy,$$

und demnach für die Summe der Momente aller auf die Fläche BDCF wirkenden Preſſungen oder für das Moment UZ_1 des Geſammtdruckes U auf jene Fläche in Beziehung zur Axe OY

$$UZ_1 = \tfrac{1}{2}w\int_{y_1}^{y_2} (z''^2 - z'^2)\,dy.$$

Hieraus folgt für den geſuchten Abſtand Z_1

$$Z_1 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{U}\int_{y_1}^{y_2} (z''^2 - z'^2)\,dy \qquad \ldots\ (40)$$

Das Moment des elementaren Druckes auf das Element N in Beziehung zur Axe OZ iſt

$$w z\,dy\,dz \times y = w y z\,dy\,dz,$$

alſo das Moment des Druckes auf den Streifen DE, für welchen OG = y konſtant iſt,

$$w y\,dy\int_{z'}^{z''} z\,dz = \tfrac{1}{2}w y\,(z''^2 - z'^2)\,dz,$$

mithin das Moment UY_1 des Geſammtdruckes U auf die Fläche BDCE in Beziehung zur Axe OZ

$$UY_1 = \tfrac{1}{2}w\int_{y_1}^{y_2} y\,(z''^2 - z'^2)\,dy,$$

und hieraus folgt für den geſuchten Abſtand Y_1

$$Y_1 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{U}\int_{y_1}^{y_2} y\,(z''^2 - z'^2)\,dy \qquad \ldots\ (41)$$

In diesem und dem vorhergehenden Integrale (40) haben z' und z'' die Werthe der Funktionen (33) und es ist $y_1 = \mathrm{OF}$ und $y_2 = \mathrm{OH}$.

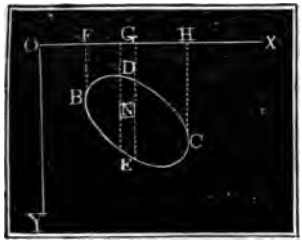
2) In einer ganz ähnlichen Weise findet man für die Abstände der zur Axe OY parallelen Komponente V von den Ebenen YX und YZ resp.

$$\mathrm{Z}_2 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{\mathrm{V}}\int_{x_1}^{x_2}(z''^2 - z'^2)\,dx \qquad \ldots\ (42)$$

$$\mathrm{X}_2 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{\mathrm{V}}\int_{x_1}^{x_2} x\,(z''^2 - z'^2)\,dx \qquad \ldots\ 43)$$

In diesen beiden Integralen haben z' und z'' die Werthe der Funktionen (35).

3) Um endlich die Abstände der zur Axe OZ parallelen Komponente oder des Schwerpunktes der über der Fläche A stehenden Flüssigkeitssäule von den Ebenen ZX und ZY zu bestimmen; so sei BDCE die Projektion der Fläche A auf die Ebene XY. Der dem Elemente N entsprechende Druck ist nach §. 14 $wz\,dx\,dy$, und demnach dessen Moment in Beziehung zur Axe OX, da $\mathrm{GN} = y$ ist,



$$wz\,dx\,dy \times y = wyz\,dx\,dy.$$

Die Summe der Momente aller ähnlichen, den verschiedenen Elementen des Streifens DE entsprechenden Pressungen, für welche $x = \mathrm{OG}$ als eine konstante Größe zu betrachten ist, ergibt sich also durch das Integral

$$w\,dx\int_{y'}^{y''} yz\,dy.$$

Hiernach hat man für die Summe der Momente aller vertikalen Pressungen, welche den verschiedenen Streifen zwischen B und C entsprechen, in Beziehung zur Axe OX oder für das Moment WY_3

$$WY_3 = w\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} yz\, dy,$$

mithin

$$Y_3 = \frac{w}{W}\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} yz\, dy \qquad \ldots\ (44)$$

Das Moment des dem Elemente N entsprechenden Druckes in Beziehung zur Axe OY ist ferner

$$wz\, dx\, dy \times x = wxz\, dx\, dy.$$

Sieht man in diesem Ausdrucke $OG = x$ als konstante Größe an; so ist die Summe der Momente aller Pressungen, welche dem Streifen DE entsprechen

$$wx\, dx \int_{y'}^{y''} z\, dy,$$

und demnach die Summe der Momente aller vertikalen Pressungen, welche der ganzen Projektion BDCE entsprechen, d. i. das Moment WX_3 der Kraft W in Beziehung zur Axe OY

$$WX_3 = w\int_{x_1}^{x_2} x\, dx \int_{y'}^{y''} z\, dy,$$

folglich

$$X_3 = \frac{w}{W}\int_{x_1}^{x_2} x\, dx \int_{y'}^{y''} z\, dy \qquad \ldots\ (45)$$

In den Integralen (44) und (45) ist zuvörderst für z die Funktion (37) zu setzen, und bei der ersten Integration in Beziehung zu y die Größe x als Konstante zu behandeln. Für die Gränzen y' und y'' dieses ersten Integrals hat man alsdann die Werthe der Funktionen (38) einzuführen, und nach der zweiten Integration in Beziehung zu x für die Gränzen x_1 und x_2 resp. die Werthe der Abszissen OF und OH zu nehmen.

Die drei Komponenten U, V, W lassen sich im Allgemeinen nicht zu einer einzigen Mittelkraft Q zusammensetzen. Sollte Dies eintreten; so müßten sich die Richtungen jener Komponenten offenbar in Ein und demselben Punkte, durch welchen alsdann auch die Mittelkraft Q gehen würde, durchschneiden; es müßte also für diesen Fall

$$Z_1 = Z_2,\ Y_1 = Y_3,\ X_2 = X_3 \qquad \ldots\ (46)$$

sein. Die Größe der Mittelkraft Q würde alsdann

$$Q = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \qquad \ldots\ (47)$$

sein, und wenn man die Neigungswinkel derselben gegen die Axe der x, der y und der z resp. λ, μ ν nennt; so würde die Richtung von Q durch die Gleichungen

$$\cos\lambda = \frac{U}{Q},\ \cos\mu = \frac{V}{Q},\ \cos\nu = \frac{W}{Q} \qquad \ldots\ (48)$$

bestimmt sein.

§. 16. Druck gegen einen bestimmten Theil der Gefäßwand, wenn dabei der atmosphärische Druck auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit berücksichtigt wird.

Wenn der atmosphärische Druck p auf die Flächeneinheit der freien Oberfläche mit in Richtung gebracht werden soll; so ist der Druck dQ auf irgend ein Flächenelement von der Größe a nicht durch Gleichung (31), sondern durch

$$dQ = \varpi z a + p a = (\varpi z + p)\, a \qquad \ldots\ (49)$$

gegeben. Hiernach sind die Komponenten dieses elementaren Druckes in parallelen Richtungen zu den Axen der x, y, z, resp.

$$(\varpi z + p)\, dy\, dz,\ (\varpi z + p)\, dx\, dz,\ (\varpi z + p)\, dx\, dy.$$

Setzt man diese Werthe resp. für

$$\varpi z\, dy\, dz,\ \varpi z\, dx\, dz,\ \varpi z\, dx\, dy$$

in §. 14; so erhält man leicht für die Komponenten des Gesammtdruckes auf die Fläche A in parallelen Richtungen zu den Axen der x, der y und der z resp.

$$U = \tfrac{1}{2} w \int_{y_1}^{y_2} (z''^2 - z'^2)\, dy + p \int_{y_1}^{y_2} (z'' - z')\, dy, \qquad \ldots (50)$$

worin z', z'', y_1, y_2 die Werthe der gleichnamigen Größen in dem Integrale (34) haben. Ferner

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_{x_1}^{x_2} (z''^2 - z'^2)\, dx + p \int_{x_1}^{x_2} (z'' - z')\, dx, \qquad \ldots (51)$$

worin z', z'', x_1, x_2 die Werthe der gleichnamigen Größen in dem Integrale (36) haben. Endlich

$$W = w \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y'}^{y''} z\, dy + p \int_{x_1}^{x_2} (y'' - y')\, dx \qquad \ldots (52)$$

worin z, y', y'', x_1, x_2 die Werthe der gleichnamigen Größen in dem Integrale (39) haben.

Aus diesen Formeln erkennt man, daß sich durch den atmosphärischen Druck die vorhin mit U, V, W bezeichneten Druckkräfte resp. um Größen vermehren, welche gleich sind den Produkten aus p und den Projektionen der gegebenen Fläche A auf die Ebenen der yz, der xz und der xy. Die Richtungen dieser Zuwachse der Kräfte U, V, W gehen offenbar durch die Schwerpunkte der Projektionen von A, da diese Kräfte selbst gleichförmig über die Projektionen vertheilt sind. Da nun die Richtungen der früheren Kräfte U, V, W selbst im Allgemeinen nicht durch die Schwerpunkte der erwähnten Projektionen gehen; so folgt, daß durch den Zuwachs des atmosphärischen Druckes die Angriffspunkte der früheren Kräfte U, V, W verrückt werden. Wegen der geringen Wichtigkeit, welche die Ermittelung dieser Angriffspunkte im Allgemeinen hat, halten wir uns jedoch nicht weiter bei der Reduktion der allgemeinen Formeln (40) bis (45) auf. Nach dem angeführten Prinzipe, nach welchem man für den Druck $w z a$ auf irgend ein Element von der Fläche a jetzt $w z a + p a$ zu setzen hat, ist jene Umformung leicht zu bewerkstelligen. Wenn man in der Praxis die Werthe und Angriffspunkte der Kräfte U, V, W zu erfahren wünscht, um danach die erforderliche Fe-

stigkeit der Gefäßwände zu bestimmen; so sind nur die in §. 14 und 15 ermittelten Werthe von Wichtigkeit, weil sich ein jeder Theil des atmosphärischen Druckes, welcher durch die Flüssigkeit auf einen Theil der Gefäßwand fortgepflanzt wird, auch von außen in direkt entgegengesetzter Richtung gegen denselben Theil der Gefäßwand äußert, und demnach mit dem von innen kommenden im Gleichgewichte ist.

§. 17. Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit gegen irgend eine ebene Figur. — Mittelpunkt des Druckes.

Wenn die Fläche A, gegen welche sich die Flüssigkeit stützt, eben ist; so setzen sich die elementaren Pressungen, welche einander sämmtlich parallel sind, stets zu einer einzigen auf der Ebene von A perpendikular stehenden Mittelkraft Q zusammen.

Legt man die Koordinatenaxe der x in die Durchschnittslinie der Ebene von A mit der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit, welche Letztere vorhin zur Koordinatenebene der xy angenommen wurde, und bezeichnet den Neigungswinkel der Ebene von A gegen die Ebene der xy oder den Neigungswinkel der Normale auf A gegen die Axe der z mit γ; so wird die Gleichung der Ebene von A oder die Funktion (37)

$$z = y \operatorname{tang} \gamma \qquad \ldots\ldots (53)$$

sein.

Die Mittelkraft U der horizontalen, den x parallelen Pressungen ist, wie sich schon vorhersehen läßt, gleich null. Dasselbe Resultat geht aber auch aus der allgemeinen Gleichung (34) hervor: denn da sich die Projektion von A auf die Ebene YZ hier auf das Stück einer geraden Linie reduzirt, welche sich unter dem Winkel γ gegen die Axe OY neigt; so hat man statt der allgemeinen Formeln (33)

$$z' = y \operatorname{tang} \gamma \text{ und auch } z'' = y \operatorname{tang} \gamma, \qquad \ldots\ldots (54)$$

also

$$z' = z'' \text{ und } z'' - z' = o;$$

mithin

$$U = o \qquad \ldots\ldots (55)$$

Für die Mittelkraft V den horizontalen, den y paralle Pressungen erhält man durch Gleichung (36)

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_{x_1}^{x_2} (z''^2 - z'^2)\, dx, \qquad \ldots\ (56)$$

worin allgemein

$$\left.\begin{aligned} z' &= \psi'(x) \\ z'' &= \psi''(x) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (57)$$

ist.

Die Abstände dieser Kraft resp. von den Ebenen der und der yz sind nach Gl. (42) und (43)

$$Z_2 = \tfrac{1}{2} \frac{w}{V} \int_{x_1}^{x_2} (z''^3 - z'^3)\, dx \qquad \ldots\ (58)$$

$$X_2 = \tfrac{1}{2} \frac{w}{V} \int_{x_1}^{x_2} x (z''^2 - z'^2)\, dx \qquad \ldots\ (59)$$

Die Mittelkraft W aller vertikalen, den z parallelen P sungen ist nach Gl. (39), wenn man darin

$$\int_{y'}^{y''} z\, dy = \int_{y'}^{y''} y \operatorname{tang}\gamma\, dy = \tfrac{1}{2} (y''^2 - y'^2) \operatorname{tang}\gamma \text{ setzt,}$$

$$W = \tfrac{1}{2} w \operatorname{tang}\gamma \int_{x_1}^{x_2} (y''^2 - y'^2)\, dx, \qquad \ldots\ (60)$$

worin wegen der Gleichungen (54) und (57)

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{\psi'(x)}{\operatorname{tang}\gamma} \\ y'' &= \frac{\psi''(x)}{\operatorname{tang}\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (61)$$

9. Wegen der Gleichungen (44) und (45) sind die Abst Kraft W resp. von den Ebenen der zx und zy

$$Y_2 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{W}\operatorname{tang}\gamma\int_{x_1}^{x_2}(y''^3 - y'^3)\,dx \qquad \ldots\ldots (62)$$

$$X_2 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{W}\operatorname{tang}\gamma\int_{x_1}^{x_2}x(y''^2 - y'^2)\,dx \qquad \ldots\ldots (63)$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt, welches auch die Figur des Umfanges der ebenen Fläche A sei,

1) wenn man die beiden Formeln (56) und (60) mit einander vergleicht, und beachtet, daß darin immer $z' = y' \operatorname{tang}\gamma$ und $z'' = y'' \operatorname{tang}\gamma$ sein wird, daß

$$W = \frac{V}{\operatorname{tang}\gamma} \qquad \ldots\ldots (64)$$

ist;

2) wenn man die beiden Formeln (59) und (63) mit einander vergleicht, und dabei dieselben Beziehungen zwischen den Größen z', y' und z'', y'', sowie die vorstehende Gleichung (64) beachtet, daß

$$X_2 = X_3 \qquad \ldots\ldots (65)$$

ist oder daß die Abstände der Kräfte V und W von der Ebene der yz einander gleich sind, sodaß diese Kräfte immer in Ein und derselben Vertikalebene liegen, welche auf der gegebenen ebenen Fläche perpendikular steht, und sich daher zu einer einzigen mittleren Resultante zusammensetzen lassen;

3) wenn man die beiden Formeln (58) und (62) mit einander vergleicht, daß

$$Z_2 = Y_3 \operatorname{tang}\gamma \qquad \ldots\ldots (65^a)$$

oder daß der Abstand der Kraft V von der Ebene der xy, gleich dem Abstande der Kraft W von der Ebene der xz, multiplizirt mit $\operatorname{tang}\gamma$, ist. Aus dieser letzten Beziehung folgt, wegen Gl. (53), daß der Durchschnittspunkt der Richtungen der beiden Kräfte V und W in der gegebenen ebenen Wand liegt. Diesen Punkt, welcher zugleich der Angriffspunkt der Mittelkraft von V und W oder des gesammten auf die Fläche A ausgeübten

normalen Druckes Q ist, nennt man den **Mittelpunkt des Druckes.**

4) Da der gesammte auf die Fläche A ausgeübte Druck Q der Flüssigkeit $= \sqrt{V^2 + W^2}$ ist; so hat man wegen der Beziehung (64)

$$\left.\begin{aligned} Q &= V\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tang}^2\gamma}} = \frac{V}{\sin\gamma} \\ \text{oder auch} \\ Q &= W\sqrt{\operatorname{tang}^2\gamma+1} = \frac{W}{\cos\gamma} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (65^b)$$

Dieses Resultat kann sehr einfach folgendermaaßen ausgedrückt werden: Es sei A der Flächeninhalt der gegebenen Figur und h der Abstand ihres Schwerpunktes von der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit; alsdann ist $A\sin\gamma$ die Projektion der Fläche A auf die Ebene der xz, und h wird ebenfalls der Abstand des Schwerpunktes dieser Projektion von dem oberen Spiegel der Flüssigkeit sein. Nach bekannten Formeln für die Bestimmung des Schwerpunktes hat man also

$$h.A\sin\gamma = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z'}^{z''} z\,dz = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (z''^2 - z'^2)\,dx,$$

und wenn man diesen Ausdruck mit dem Werthe von V aus Gl. (56) vergleicht,

$$V = w h A \sin\gamma \quad \ldots\ldots (66)$$

Da $W = \frac{V}{\operatorname{tang}\gamma}$ ist, würde man auch

$$W = w h A \cos\gamma \quad \ldots\ldots (67)$$

und endlich

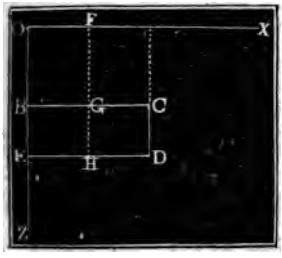
$$Q = w h A \quad \ldots\ldots (68)$$

haben, d. h. der normale Druck Q gegen die ebene Fläche A ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche zur Grundfläche die Figur A und zur Höhe den Abstand h des Schwerpunktes von A von der freien Oberfläche der Flüssigkeit hat.

Der Ausdruck whA ergibt den Werth des Druckes Q, welches auch die Neigung der oberen Wand sei. Ist dieselbe horizontal; so fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte der Fläche A zusammen. In den anderen Fällen erfährt man die Lage des Mittelpunktes des Druckes, indem man die beiden Abstände Z_2 und X_2 desselben resp. von den Ebenen der xy und yz nach den Formeln (58) und (59) bestimmt.

§. 18. Druck einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit auf ein vertikales Rechteck.

Wenn die Fläche A in einer vertikalen Wand liegt und ein Rechteck BCDE bildet, dessen obere und untere Seite horizontal ist; so sei $BC = a$, $BE = b$ und der Abstand FG der oberen Seite von dem horizontalen Spiegel der Flüssigkeit $= c$. Alsdann hat man statt der Gleichungen (57), da hier $z' = FG$ und $z'' = FH$ für die ganze Ausdehnung der Fläche A konstante, von der Abszisse $OF = x$ unabhängige Größen sind,



$$\left.\begin{aligned} z' &= c \\ z'' &= c + b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (69)$$

ferner hat man, wenn man die Axe OZ in die Verlängerung der Seite BE legt,

$$x_1 = o \text{ und } x_2 = OJ = a;$$

demnach statt der Gleichung (56) für den normalen Druck der Flüssigkeit auf das gegebene Rechteck

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_o^a [(c+b)^2 - c^2]\, dx = ab\left(c + \frac{b}{2}\right) w \quad \ldots\ldots (70)$$

Die Formeln (58) und (59) ergeben für den Abstand des Angriffspunktes dieses Druckes von den Axen OX und OZ resp.

Punkt C mit dem Halbmesser r beschrieben ist; so sei OX der horizontale Spiegel der Flüssigkeit und die vertikale Axe OZ gehe durch den Mittelpunkt C des Kreises. Setzt man alsdann die Tiefe OC, in welcher der Mittelpunkt unter dem Spiegel der Flüssigkeit liegt, gleich c; so hat man für irgend eine Abszisse $OF = x$

$$\left.\begin{aligned} z' &= FG = c - \sqrt{r^2 - x^2} \\ z'' &= FH = c + \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (86)$$

Außerdem ist

$$x_1 = -r \text{ und } x_2 = +r;$$

folglich nach Gl. (56)

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_{-r}^{+r} [(c + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (c - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx = \tfrac{1}{2} w \int_{-r}^{+r} 4c \sqrt{r^2 - x^2} . dx$$

d. i., da allgemein

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{arc.cos} \frac{-x}{r} \text{ ist,}$$

$$V = \pi r^2 c w \quad \ldots\ldots (87)$$

Aus der Formel (58) folgt für den vertikalen Abstand des Angriffspunktes dieses Druckes von dem Spiegel der Flüssigkeit

$$Z_2 = \tfrac{1}{2} \frac{w}{V} \int_{-r}^{+r} [(c + \sqrt{r^2 - x^2})^3 - (c - \sqrt{r^2 - x^2})^3] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{w}{V} \int_{-r}^{+r} 2 (3c^2 + r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2} . dx$$

$$= \frac{2w}{V} \left[c^2 \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx + \tfrac{1}{2} \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \right].$$

$$\left.\begin{aligned} x' = FG = FH - HG = c + b - \frac{b}{a}(a - x) = c + \frac{b}{a}x \\ x'' = FH = c + b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (76)$$

Ferner iſt

$$x_1 = o \text{ und } x_2 = DC = a.$$

Statt der Gleichung (56) hat man alſo

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_o^a \left[(c+b)^2 - \left(c + \frac{b}{a}x\right)^2\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} w \int_o^a \left(2bc + b^2 - \frac{2bc}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) dx,$$

d. i. nach gehöriger Integration und Reduktion

$$V = ab(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{3}b)w \qquad \ldots\ldots (77)$$

Für den Abſtand des Angriffspunktes dieſes Druckes von dem horizontalen Spiegel der Flüſſigkeit hat man nach Gl. (58)

$$Z_2 = \tfrac{1}{2}\frac{w}{V}\int_o^a \left[(c+b)^3 - \left(c + \frac{b}{a}x\right)^3\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{w}{V}\int_o^a \left(3bc^2 + 3b^2c + b^3 - \frac{3bc^2}{a}x - \frac{3b^2c}{a^2}x^2 - \frac{b^3}{a^3}x^3\right) dx,$$

d. i. nach gehöriger Integration und Reduktion und wenn man für V ſeinen Werth aus Gl. (77) einführt,

$$Z_2 = c + \tfrac{1}{2}b\,\frac{4c+3b}{3c+2b} \qquad \ldots\ldots (78)$$

Wenn die Spitze des Dreiecks BCD im Spiegel der Flüſſigkeit läge, wenn alſo $c = o$ wäre; ſo würde man

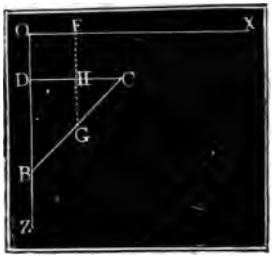
$$V = \tfrac{1}{2}ab^2w \qquad \ldots\ldots (79)$$

und

$$Z_2 = \tfrac{2}{3}b \qquad \ldots\ldots (80)$$

haben.

Man sieht leicht ein, daß die vorstehenden Ausdrücke (77) bis (80) auch dann noch Gültigkeit behalten werden, wenn das Dreieck BCD, dessen untere Basis DC jedoch horizontal bleiben muß, bei D nicht rechtwinklig ist.



Wäre die horizontale Basis DC des fraglichen Dreiecks nach oben und die Spitze B nach unten gekehrt; so würde man, wenn man $DC = a$, $DB = b$, und $OB = c$ setzt,

$$z' = FH = c - b$$

$$z'' = FG = FH + HG = (c-b) + \frac{b}{a}(a-x) = c - \frac{b}{a}x \Big\} \ldots\ldots (81)$$

und

$$x_1 = o,\ x_2 = DC = a$$

haben. Hiernach würde sich aus Gl. (56) für den Druck auf das Dreieck DCB

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_o^a \left[\left(c - \frac{b}{a}x\right)^2 - (c-b)^2\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} w \int_o^a \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{2bc}{a}x + 2bc - b^2\right) dx,$$

d. i. nach gehöriger Integration und Reduktion

$$V = ab(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{6}b)w \qquad \ldots\ldots (82)$$

ergeben. Der Abstand des Angriffspunktes dieses Druckes von dem horizontalen Spiegel der Flüssigkeit würde nach Gl. (58)

$$Z_2 = \tfrac{1}{V} \int_o^a \left[\left(c - \frac{b}{a}x\right)^3 - (c-b)^3\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{V} \int_o^a \left(3bc^2 - 3b^2c + b^3 - \frac{3bc^2}{a}x + \frac{3b^2c}{a^2}x^2 - \frac{b^3}{a^3}x^3\right) dx$$

ace zu ſetzen iſt. Hiernach wird man denn überhaupt zur Erklärung der Erſcheinungen des Druckes einer Flüſſigkeit auf die unvollkommen glatte Fläche *abcde* die Wirkungen jenes Druckes auf die abſolut glatte Fläche *ace* ſubſtituiren können.

Gleichgewicht der auf der Oberfläche ſchwerer unpreßbarer Flüſſigkeiten ſchwimmenden Körper.

§. 22. Allgemeine Bedingungen des Schwimmens.

Nehmen wir an, irgend ein ſtarrer Körper ſei ganz oder zum Theil in eine ſchwere unpreßbare Flüſſigkeit getaucht, welche oben einen freien horizontalen Spiegel bildet, und unterſuchen wir die Bedingungen, unter welchen dieſer Körper im Zuſtande des Gleichgewichts verharren wird. Dieſe Bedingungen werden erfüllt ſein, wenn ſich alle auf den Körper wirkenden Kräfte gegenſeitig vernichten, wenn ſich alſo die in den Körper wirkende Schwere mit den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit in Gleichgewicht zu ſetzen vermag.

Die Wirkung der Schwere auf die verſchiedenen Maſſentheilchen des Körpers ſetzt ſich bekanntlich immer, derſelbe mag nun aus einer gleichartigen oder ungleichartigen Materie beſtehen, in eine einzige Mittelkraft, nämlich in das Gewicht des Körpers, zuſammen. Die Richtung dieſer Kraft iſt vertikal von oben nach unten gekehrt und geht durch den Schwerpunkt des fraglichen Körpers. Soll alſo zwiſchen dem Körper und den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit Gleichgewicht ſtattfinden; ſo müſſen ſich auch die letzteren in eine einzige Kraft zuſammenſetzen laſſen, deren Stärke gleich dem Gewichte des Körpers und deren Richtung vertikal von unten nach oben gekehrt iſt und ebenfalls durch den Schwerpunkt des ſchwimmenden Körpers geht.

Zur Unterſuchung der mittleren Reſultante aller auf den Körper ausgeübten Preſſungen der Flüſſigkeit denken wir uns dieſelbe in drei rechtwinklige Komponenten zerlegt, von denen zwei horizontal und die dritte vertikal iſt. Aus §. 13 geht nun ſehr leicht hervor, daß eine jede horizontale Komponente gleich null ſein müſſe. Denn welches auch die beſondere Richtung dieſer horizontalen Komponente oder die Richtung der auf derſelben

Punkt C mit dem Halbmesser r beschrieben ist; so sei OX der horizontale Spiegel der Flüssigkeit und die vertikale Axe OZ gehe durch den Mittelpunkt C des Kreises. Setzt man alsdann die Tiefe OC, in welcher der Mittelpunkt unter dem Spiegel der Flüssigkeit liegt, gleich c; so hat man für irgend eine Abszisse $OF = x$

$$\left.\begin{aligned} z' &= FG = c - \sqrt{r^2 - x^2} \\ z'' &= FH = c + \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (86)$$

Außerdem ist

$$x_1 = -r \text{ und } x_2 = +r;$$

folglich nach Gl. (56)

$$V = \tfrac{1}{2} w \int_{-r}^{+r} [(c + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (c - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx = \tfrac{1}{2} w \int_{-r}^{+r} 4c \sqrt{r^2 - x^2} . dx$$

d. i., da allgemein

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{arc.cos} \frac{-x}{r} \text{ ist,}$$

$$V = \pi r^2 c w \quad \ldots\ldots (87)$$

Aus der Formel (58) folgt für den vertikalen Abstand des Angriffspunktes dieses Druckes von dem Spiegel der Flüssigkeit

$$Z_2 = \tfrac{1}{2} \frac{w}{V} \int_{-r}^{+r} [(c + \sqrt{r^2 - x^2})^3 - (c - \sqrt{r^2 - x^2})^3] dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{w}{V} \int_{-r}^{+r} 2(3c^2 + r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2} . dx$$

$$= \frac{2w}{V} \left[c^2 \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx + \tfrac{1}{2} \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \right].$$

ace zu ſetzen iſt. Hiernach wird man denn überhaupt zur Erklärung der Erſcheinungen des Druckes einer Flüſſigkeit auf die unvollkommen glatte Fläche *abcde* die Wirkungen jenes Druckes auf die abſolut glatte Fläche *ace* ſubſtituiren können.

Gleichgewicht der auf der Oberfläche ſchwerer unpreßbarer Flüſſigkeiten ſchwimmenden Körper.

§. 22. Allgemeine Bedingungen des Schwimmens.

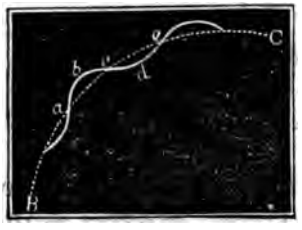
Nehmen wir an, irgend ein ſtarrer Körper ſei ganz oder zum Theil in eine ſchwere unpreßbare Flüſſigkeit getaucht, welche oben einen freien horizontalen Spiegel bildet, und unterſuchen wir die Bedingungen, unter welchen dieſer Körper im Zuſtande des Gleichgewichts verharren wird. Dieſe Bedingungen werden erfüllt ſein, wenn ſich alle auf den Körper wirkenden Kräfte gegenſeitig vernichten, wenn ſich alſo die in den Körper wirkende Schwere mit den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit in Gleichgewicht zu ſetzen vermag.

Die Wirkung der Schwere auf die verſchiedenen Maſſentheilchen des Körpers ſetzt ſich bekanntlich immer, derſelbe mag nun aus einer gleichartigen oder ungleichartigen Materie beſtehen, in eine einzige Mittelkraft, nämlich in das Gewicht des Körpers, zuſammen. Die Richtung dieſer Kraft iſt vertikal von oben nach unten gekehrt und geht durch den Schwerpunkt des fraglichen Körpers. Soll alſo zwiſchen dem Körper und den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit Gleichgewicht ſtattfinden; ſo müſſen ſich auch die letzteren in eine einzige Kraft zuſammenſetzen laſſen, deren Stärke gleich dem Gewichte des Körpers und deren Richtung vertikal von unten nach oben gekehrt iſt und ebenfalls durch den Schwerpunkt des ſchwimmenden Körpers geht.

Zur Unterſuchung der mittleren Reſultante aller auf den Körper ausgeübten Preſſungen der Flüſſigkeit denken wir uns dieſelbe in drei rechtwinklige Komponenten zerlegt, von denen zwei horizontal und die dritte vertikal iſt. Aus §. 13 geht nun ſehr leicht hervor, daß eine jede horizontale Komponente gleich null ſein müſſe. Denn welches auch die beſondere Richtung dieſer horizontalen Komponente oder die Richtung der auf derſelben

der Normalen gerichtet ſein mußte (vergl. §. 3), eine Vorausſetzung, auf welche ſich die erſten Betrachtungen des §. 13 baſiren.

Man erkennt übrigens leicht, daß ſämmtliche Reſultate von §. 13 bis §. 20 auch dann noch Gültigkeit behalten, wenn ſich auf der Fläche A lauter ungemein kleine Erhabenheiten und Vertiefungen befinden, welche jedoch ſo klein ſind, daß ſie jener Fläche nur die Eigenſchaft der Reibung verleihen, ohne auf die Geſtalt derſelben oder auf die Gleichung (29) einen bemerkbaren Einfluß zu äußern. Denn wenn BC der Durchſchnitt einer ſolchen unter dem Spiegel einer Flüſſigkeit befindlichen Fläche wäre; ſo ſei *abc* irgend Eine der erwähnten Erhabenheiten und *cde* Eine der Vertiefungen, welche ſo klein gedacht werden, daß die Stärke des Druckes der Flüſſigkeit in irgend einem Punkte der wellenförmigen Linie *abcde* ohne merklichen Fehler gleich dem Drucke angenommen werden kann, welcher in dem perpendikular gegenüberliegenden Punkte der gleichmäßig gekrümmten Linie *ace* ſtattfinden würde. Da jetzt alle Theile der wellenförmigen Oberfläche *abcde* als abſolut glatt angeſehen werden müſſen; ſo wird man auf dieſelben die Unterſuchungen des §s 13 ff. in aller Strenge in Anwendung bringen können, nach welchen die Preſſungen der Flüſſigkeit auf die Fläche *abcde* in Richtungen erfolgen, welche in den verſchiedenen Punkten auf jener Fläche normal ſtehen. Nun hat man geſehen, daß von den drei rechtwinkligen Komponenten des auf die Fläche *abcde* ausgeübten Druckes die beiden horizontalen ſo groß ſind, wie der Druck der Flüſſigkeit auf die beiden vertikalen Projektionen jener Fläche, und daß die vertikale Komponente gleich dem Gewichte der über *abcde* ſtehenden Flüſſigkeitsſäule iſt. Da aber eine jede Projektion von *abcde* gleich der entſprechenden von *ace* iſt; ſo folgt, daß ein jeder horizontale Druck auf *abcde* ſowol der Größe, wie dem Angriffspunkte nach, dem entſprechenden auf *ace* gleich ſein wird. Außerdem wird die über der Fläche *abcde* ſtehende Flüſſigkeitsſäule gleich der über *ace* ſtehenden zu nehmen ſein, ſodaß auch der vertikale Druck auf *abcde* ſowol der Größe, wie dem Angriffspunkte nach gleich dem auf



ace zu ſetzen iſt. Hiernach wird man denn überhaupt zur Erklärung der Erſcheinungen des Druckes einer Flüſſigkeit auf die unvollkommen glatte Fläche *abcde* die Wirkungen jenes Druckes auf die abſolut glatte Fläche *ace* ſubſtituiren können.

Gleichgewicht der auf der Oberfläche ſchwerer unpreßbarer Flüſſigkeiten ſchwimmenden Körper.

§. 22. Allgemeine Bedingungen des Schwimmens.

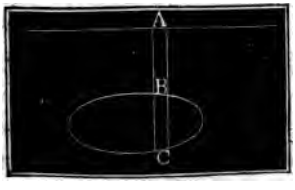
Nehmen wir an, irgend ein ſtarrer Körper ſei ganz oder zum Theil in eine ſchwere unpreßbare Flüſſigkeit getaucht, welche oben einen freien horizontalen Spiegel bildet, und unterſuchen wir die Bedingungen, unter welchen dieſer Körper im Zuſtande des Gleichgewichts verharren wird. Dieſe Bedingungen werden erfüllt ſein, wenn ſich alle auf den Körper wirkenden Kräfte gegenſeitig vernichten, wenn ſich alſo die in den Körper wirkende Schwere mit den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit in Gleichgewicht zu ſetzen vermag.

Die Wirkung der Schwere auf die verſchiedenen Maſſentheilchen des Körpers ſetzt ſich bekanntlich immer, derſelbe mag nun aus einer gleichartigen oder ungleichartigen Materie beſtehen, in eine einzige Mittelkraft, nämlich in das Gewicht des Körpers, zuſammen. Die Richtung dieſer Kraft iſt vertikal von oben nach unten gekehrt und geht durch den Schwerpunkt des fraglichen Körpers. Soll alſo zwiſchen dem Körper und den Preſſungen der umgebenden Flüſſigkeit Gleichgewicht ſtattfinden; ſo müſſen ſich auch die letzteren in eine einzige Kraft zuſammenſetzen laſſen, deren Stärke gleich dem Gewichte des Körpers und deren Richtung vertikal von unten nach oben gekehrt iſt und ebenfalls durch den Schwerpunkt des ſchwimmenden Körpers geht.

Zur Unterſuchung der mittleren Reſultante aller auf den Körper ausgeübten Preſſungen der Flüſſigkeit denken wir uns dieſelbe in drei rechtwinklige Komponenten zerlegt, von denen zwei horizontal und die dritte vertikal iſt. Aus §. 13 geht nun ſehr leicht hervor, daß eine jede horizontale Komponente gleich null ſein müſſe. Denn welches auch die beſondere Richtung dieſer horizontalen Komponente oder die Richtung der auf derſelben

perpendikular ſtehenden Vertikalebene ſei; ſo gibt es von der geſammten unter dem Spiegel der Flüſſigkeit befindlichen Oberfläche des Körpers zwei Projektionen, welche der obgenannten Vertikalebene parallel, aber nach direkt entgegengeſetzten Seiten gekehrt ſind. Durch horizontale Linien, welche in den Umfängen dieſer beiden Projektionen auf den entſprechenden Vertikalebenen perpendikular oder zu der in Rede ſtehenden horizontalen Komponente parallel gezogen ſind, bildet ſich eine zylindriſche Fläche, welche den ſchwimmenden Körper allgemein in einer Kurve berührt. Durch dieſe Kurve wird die Oberfläche des Körpers in zwei Theile getheilt, welche den horizontalen Druck der Flüſſigkeit von entgegengeſetzten Seiten empfangen. Da nun nach §. 13 der horizontale Druck der Flüſſigkeit gegen irgend eine Fläche ſowol der Größe, wie dem Angriffspunkte nach gleich dem Drucke auf die entſprechende Vertikalprojektion dieſer Fläche iſt; ſo folgt daß die beiden vorhin genannten Theile der Oberfläche des ſchwimmenden Körpers in horizontaler Richtung ſtets von zwei Kräften gedrückt werden, welche der Größe und dem Angriffspunkte nach einander gleich, der Richtung nach aber direkt entgegengeſetzt ſind, ſodaß ſie ſich in ihren Wirkungen gegenſeitig vernichten.

Ferner erkennt man, daß ſich die vertikalen Komponenten der Preſſungen der Flüſſigkeit gegen die untergetauchten Theile der Oberfläche des Körpers ſtets zu einer einzigen Kraft zuſammenſetzen, welche vertikal von unten nach oben wirkt, dem Gewichte der durch den Körper *verdrängten* Flüſſigkeitsmenge gleich iſt und durch den Schwerpunkt dieſer Flüſſigkeitsmenge geht. Denn zwei Elemente **B** und **C** der unter dem Spiegel der Flüſſigkeit liegenden Oberfläche des Körpers, welche einander vertikal gegenüberliegen und dieſelbe Horizontalprojektion **A** beſitzen, empfangen immer zwei vertikale Preſſungen in entgegengeſetzten Richtungen, von denen die Eine Preſſung gegen das obere Element **A** von oben nach unten gerichtet und gleich dem Gewichte der Flüſſigkeitsſäule **AB** iſt, die andre Preſſung gegen das untere Element **C** aber von unten nach oben gekehrt und



gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule AC ist, sodaß sich die vertikalen Pressungen der Flüssigkeit gegen die beiden Elemente B und C auf eine einzige vertikal von unten nach oben gerichtete Kraft reduziren, deren Betrag dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule BC gleich ist. Da sich Dies von jeden zwei vertikal gegenüberliegenden Elementen der Oberfläche des Körpers sagen läßt; so folgt, daß die Gesammtwirkung des Druckes der Flüssigkeit auf den fraglichen Körper in einer vertikalen, von unten nach oben gerichteten Kraft besteht, deren Größe gleich dem Gewichte der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge ist und welche durch den Schwerpunkt dieses Flüssigkeitsquantums geht. Diese Wirkung der Flüssigkeit auf einen darin getauchten Körper nennt man den Auftrieb der Flüssigkeit.

Es leuchtet ein, daß es für die vorstehenden Resultate gleichgültig ist, ob der schwimmende Körper ganz von der Flüssigkeit umgeben ist, oder ob ein Theil desselben über die freie horizontale Oberfläche der Flüssigkeit hinausragt.

Auch werden dieselben dadurch nicht modifizirt, daß sich etwa auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit ein gleichförmig vertheilter Druck äußert, da sich die Wirkung dieses Druckes auf je zwei direkt entgegengesetzte Projektionen der Oberfläche des Körpers vernichtet (vergl. §. 16). Wenn ein Theil der Körperoberfläche über die freie Oberfläche der Flüssigkeit hinausragt, so ist es unter den letzteren Umständen nur erforderlich, daß der auf die Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübte Druck sich auch gleichförmig und in derselben Stärke über den hervorragenden Theil der Körperoberfläche verbreite und überall normal gegen dieselbe gerichtet sei, wie es sich immer ereignet, wenn der fragliche Druck durch die Spannung einer elastischen Flüssigkeit, z. B. durch die atmosphärische Luft, hervorgebracht wird, in welche der schwimmende Körper sofort eintaucht, sobald ein Theil desselben über den Spiegel der Flüssigkeit hervortritt.

Nach dem Vorstehenden kommen die Bedingungen für das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers auf folgende zurück: 1) daß das Gewicht des Körpers gleich sei dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge; 2) daß der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt dieser Flüssigkeitsmenge in Ein und derselben Vertikallinie liegen.

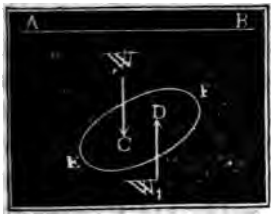
Ist sowol der Körper, wie die Flüssigkeit homogen; so fällt der Schwerpunkt des Körpers mit dem der Flüssigkeitsmenge, deren Raum er einnimmt, immer zusammen, und die Bedingung für das Gleichgewicht besteht alsdann nur darin, daß das Gewicht des Körpers dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich sei.

Die Resultate dieses Paragraphs hätte man auch durch folgende Betrachtung hervorbringen können. Man denke sich in einer ruhenden Flüssigkeit irgend eine auf beliebige Weise begränzte Menge, von welcher auch der freie Spiegel der Flüssigkeit ein Theil der Umgränzung sein kann. Da diese Menge selbst schwer und von sonstigen Kräften nicht belebt ist, sich aber doch in Ruhe befindet; so kann dieser Zustand des Gleichgewichtes nur dadurch hervorgebracht werden, daß die Gesammtwirkung der umgebenden Flüssigkeit eine vertikale, von unten nach oben gerichtete Kraft gleich dem Gewichte der obigen Flüssigkeitsmenge ist, deren Richtung durch den Schwerpunkt dieser Menge geht. Will man nun statt der gedachten Flüssigkeitsmenge einen von derselben Umgränzung eingeschlossenen schweren starren Körper substituiren (der sich jedoch, wenn jene Flüssigkeitsmenge zum Theil von dem Spiegel der Flüssigkeit begränzt war, über diesen Theil des Spiegels in willkürlichen Formen erheben kann); so wird nach den Gesetzen der Wechselwirkung die Wirkung zwischen der Oberfläche dieses Körpers und der der umgebenden Flüssigkeit genau dieselbe sein, wie sie früher zwischen der eingeschlossenen Flüssigkeitsmenge und der übrigen Flüssigkeit war, da sich die Wirkung der letzteren durch die fragliche Substitution nicht ändert und der starre Körper im Stande ist, an seiner Oberfläche in normaler Richtung den eben erforderlichen Widerstand zu leisten oder einen gleichen Gegendruck auf die Flüssigkeit auszuüben, und es kommt nur darauf an, daß die Resultante aller in die Theilchen des Körpers wirkenden Kräfte in Größe und Richtung der Resultante gleich sei, welche vorhin aus den inneren Kräften der abgegränzten Flüssigkeitsmenge hervorging. Aus dieser Forderung folgt leicht für die Bedingung des Gleichgewichtes des schwimmenden Körpers, wie vorhin, 1) daß sein Gewicht gleich dem der verdrängten Flüssigkeitsmenge sei; 2) daß

sein Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmenge in derselben Vertikallinie liege.

§. 23. Verhalten der in unpreßbare Flüssigkeiten getauchten Körper unter besonderen Umständen.

Angenommen, der Körper EF befinde sich entweder ganz oder zum Theil in eine unpreßbare Flüssigkeit getaucht, C sei sein Schwerpunkt und W sein Gewicht, D sei der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge und W_1 deren Gewicht. Wenn C und D nicht in derselben Vertikalen liegen, also die Kräfte W und W_1 sich nicht direkt entgegengesetzt sind; so wird der Körper, gleichviel ob sein Schwerpunkt C in Ruhe bleibe oder sich auf- oder niederbewege, eine Umdrehungsbewegung um seinen Schwerpunkt C annehmen, in Folge welcher der Punkt D zu steigen und sich vertikal über den Punkt C zu stellen strebt. Liegen jedoch die beiden Punkte C und D in derselben Vertikalen; so wird eine solche Umdrehungsbewegung nicht eintreten.



Der Schwerpunkt C des Körpers wird sich nach den allgemeinen Gesetzen der Mechanik*) unter allen Umständen so bewegen, als wenn die ganze Masse des Körpers in ihm konzentrirt und sämmtliche auf den Körper wirkende Kräfte auf ihn angebracht wären. Da nun auf den Körper weiter keine, als die vertikalen Kräfte W und W_1 wirken; so folgt, 1) wenn $W = W_1$ ist, daß der Schwerpunkt C des Körpers in Ruhe bleiben wird; 2) wenn $W > W_1$ ist, daß der Schwerpunkt des Körpers in der Flüssigkeit vertikal herabsinken wird, und da bei einer vollkommen unpreßbaren Flüssigkeit W_1 in jeder Tiefe denselben Werth behalten, also W stets $> W_1$ bleiben wird, daß der Körper erst auf dem festen Boden des Gefäßes zur Ruhe kommen kann; 3) wenn $W < W_1$ ist, daß sich der Schwerpunkt C des Körpers

*) Vergl. die Zusätze zum zweiten Abschnitte meiner Uebersetzung der mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley, S. 194 ff.

vertikal aufwärts bewegen wird. Diese aufsteigende Bewegung des Körpers kann erst dann endigen, nachdem der Körper zum Theil die freie Oberfläche AB der Flüssigkeit überragt, weil nur unter diesen Umständen der Werth von W_1 sich vermindern und $= W$ werden kann. Bei einem solchen Aufsteigen des Körpers aus dem Innern einer Flüssigkeit ist jedoch zu bemerken, daß, weil dasselbe mit wachsender Geschwindigkeit erfolgt und der Körper die Oberfläche der Flüssigkeit mit einer endlichen Geschwindigkeit in vertikaler Richtung von unten nach oben erreicht, der Schwerpunkt des Körpers über die vorhin bezeichnete Lage des Gleichgewichtes hinausgetrieben werden, darauf wieder zurückfallen und unter jene Lage herabsinken wird, bis sich die hieraus entstehenden Oszillationen allmählig verlieren und der Schwerpunkt des Körpers in derjenigen Lage zur Ruhe kommt, für welche man $W = W_1$ hat oder für welche das Gewicht des Körpers dem der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich ist.

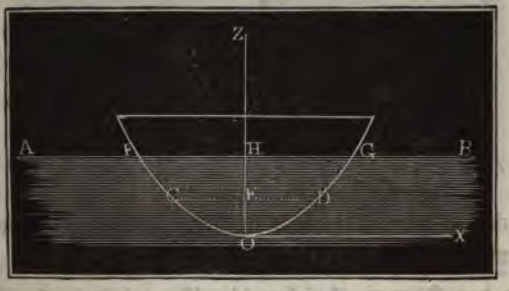
Aus dem Vorstehenden folgt, daß wenn ein Körper in einer schweren Flüssigkeit gewogen wird, er um das Gewicht eines gleichen Volums dieser Flüssigkeit leichter erscheint, als er wirklich ist. Diese Beobachtung kann offenbar sehr bequem dazu benutzt werden, das spezifische Gewicht s eines starren Körpers, welcher schwerer ist, als eine Flüssigkeit, in Beziehung zu dieser Flüssigkeit zu ermitteln. Denn da man unter diesem spezifischen Gewicht das Verhältniß $\frac{W}{W_1}$ versteht, in welchem das absolute Gewicht W des Körpers zu dem Gewichte W_1 einer Flüssigkeitsmenge von demselben Volum steht; so wird dieses spezifische Gewicht s auch

$$s = \frac{W}{W - W_2} \qquad \ldots . (91)$$

sein, worin W das absolute Gewicht des Körpers bezeichnet, wenn derselbe außerhalb, und W_2 dieses Gewicht darstellt, wenn der Körper innerhalb der fraglichen Flüssigkeit gewogen wird, indem offenbar $W - W_2 = W_1$ ist.

§. 24. Tiefe der Einsenkung eines an der Oberfläche einer unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers.

Um jetzt für den Fall, daß ein Körper CDZ an der Oberfläche einer unpreßbaren Flüssigkeit schwimmt, und sein Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmenge FOG in derselben Vertikallinie liegt, die Tiefe der Einsenkung



dieses Körpers in die Flüssigkeit zu bestimmen; so sei AFGB der horizontale Spiegel der Flüssigkeit, O der tiefste Punkt des Körpers ZCOD, eine durch O gelegte Horizontalebene die Koordinatenebene der xy, die in O auf dieser Ebene nach oben errichtete Vertikale OZ die Axe der z; ferner

W das Gewicht des Körpers,
w das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,
$z = OE$ eine beliebige vertikale Abszisse,
$F(z)$ die Größe des horizontalen Querschnittes CD des eingetauchten Körpers im Abstande z vom tiefsten Punkte O,
$Z = OH$ die Tiefe der Einsenkung des schwimmenden Körpers im Zustande des Gleichgewichtes.

Denkt man sich den Raum FOG der verdrängten Flüssigkeit in lauter horizontale Scheiben von unendlich geringer Höhe dz zerlegt; so wird das Vokum einer solchen im Abstande z vom Punkte O liegenden Scheibe, wie CD, gleich $F(z)dz$, und demnach das ganze Volum FOG der verdrängten Flüssigkeit

$$\int_0^Z F(z).dz$$

sein. Da nun das Gewicht $w\int_0^Z F(z).dz$ dieser Flüssigkeitsmenge

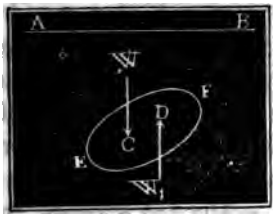
Ist sowol der Körper, wie die Flüssigkeit homogen; so fällt der Schwerpunkt des Körpers mit dem der Flüssigkeitsmenge, deren Raum er einnimmt, immer zusammen, und die Bedingung für das Gleichgewicht besteht alsdann nur darin, daß das Gewicht des Körpers dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich sei.

Die Resultate dieses Paragraphs hätte man auch durch folgende Betrachtung hervorbringen können. Man denke sich in einer ruhenden Flüssigkeit irgend eine auf beliebige Weise begränzte Menge, von welcher auch der freie Spiegel der Flüssigkeit ein Theil der Umgränzung sein kann. Da diese Menge selbst schwer und von sonstigen Kräften nicht belebt ist, sich aber doch in Ruhe befindet; so kann dieser Zustand des Gleichgewichtes nur dadurch hervorgebracht werden, daß die Gesammtwirkung der umgebenden Flüssigkeit eine vertikale, von unten nach oben gerichtete Kraft gleich dem Gewichte der obigen Flüssigkeitsmenge ist, deren Richtung durch den Schwerpunkt dieser Menge geht. Will man nun statt der gedachten Flüssigkeitsmenge einen von derselben Umgränzung eingeschlossenen schweren starren Körper substituiren (der sich jedoch, wenn jene Flüssigkeitsmenge zum Theil von dem Spiegel der Flüssigkeit begränzt war, über diesen Theil des Spiegels in willkürlichen Formen erheben kann); so wird nach den Gesetzen der Wechselwirkung die Wirkung zwischen der Oberfläche dieses Körpers und der der umgebenden Flüssigkeit genau dieselbe sein, wie sie früher zwischen der eingeschlossenen Flüssigkeitsmenge und der übrigen Flüssigkeit war, da sich die Wirkung der letzteren durch die fragliche Substitution nicht ändert und der starre Körper im Stande ist, an seiner Oberfläche in normaler Richtung den eben erforderlichen Widerstand zu leisten oder einen gleichen Gegendruck auf die Flüssigkeit auszuüben, und es kommt nur darauf an, daß die Resultante aller in die Theilchen des Körpers wirkenden Kräfte in Größe und Richtung der Resultante gleich sei, welche vorhin aus den inneren Kräften der abgegränzten Flüssigkeitsmenge hervorging. Aus dieser Forderung folgt leicht für die Bedingung des Gleichgewichtes des schwimmenden Körpers, wie vorhin, 1) daß sein Gewicht gleich dem der verdrängten Flüssigkeitsmenge sei; 2) daß

sein Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmenge in derselben Vertikallinie liege.

§. 23. Verhalten der in unpreßbare Flüssigkeiten getauchten Körper unter besonderen Umständen.

Angenommen, der Körper EF befinde sich entweder ganz oder zum Theil in eine unpreßbare Flüssigkeit getaucht, C sei sein Schwerpunkt und W sein Gewicht, D sei der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge und W_1 deren Gewicht. Wenn C und D nicht in derselben Vertikalen liegen, also die Kräfte W und W_1 sich nicht direkt entgegengesetzt sind; so wird der Körper, gleichviel ob sein Schwerpunkt C in Ruhe bleibe oder sich auf- oder niederbewege, eine Umdrehungsbewegung um seinen Schwerpunkt C annehmen, in Folge welcher der Punkt D zu steigen und sich vertikal über den Punkt C zu stellen strebt. Liegen jedoch die beiden Punkte C und D in derselben Vertikalen; so wird eine solche Umdrehungsbewegung nicht eintreten.



Der Schwerpunkt C des Körpers wird sich nach den allgemeinen Gesetzen der Mechanik*) unter allen Umständen so bewegen, als wenn die ganze Masse des Körpers in ihm konzentrirt und sämmtliche auf den Körper wirkende Kräfte auf ihn angebracht wären. Da nun auf den Körper weiter keine, als die vertikalen Kräfte W und W_1 wirken; so folgt, 1) wenn $W=W_1$ ist, daß der Schwerpunkt C des Körpers in Ruhe bleiben wird; 2) wenn $W>W_1$ ist, daß der Schwerpunkt des Körpers in der Flüssigkeit vertikal herabsinken wird, und da bei einer vollkommen unpreßbaren Flüssigkeit W_1 in jeder Tiefe denselben Werth behalten, also W stets $>W_1$ bleiben wird, daß der Körper erst auf dem festen Boden des Gefäßes zur Ruhe kommen kann; 3) wenn $W<W_1$ ist, daß sich der Schwerpunkt C des Körpers

*) Vergl. die Zusätze zum zweiten Abschnitte meiner Uebersetzung der mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley, S. 194 ff.

vertikal aufwärts bewegen wird. Diese aufsteigende Bewegung des Körpers kann erst dann endigen, nachdem der Körper zum Theil die freie Oberfläche AB der Flüssigkeit überragt, weil nur unter diesen Umständen der Werth von W_1 sich vermindern und $= W$ werden kann. Bei einem solchen Aufsteigen des Körpers aus dem Innern einer Flüssigkeit ist jedoch zu bemerken, daß, weil dasselbe mit wachsender Geschwindigkeit erfolgt und der Körper die Oberfläche der Flüssigkeit mit einer endlichen Geschwindigkeit in vertikaler Richtung von unten nach oben erreicht, der Schwerpunkt des Körpers über die vorhin bezeichnete Lage des Gleichgewichtes hinausgetrieben werden, darauf wieder zurückfallen und unter jene Lage herabsinken wird, bis sich die hieraus entstehenden Oszillationen allmählig verlieren und der Schwerpunkt des Körpers in derjenigen Lage zur Ruhe kommt, für welche man $W = W_1$ hat oder für welche das Gewicht des Körpers dem der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich ist.

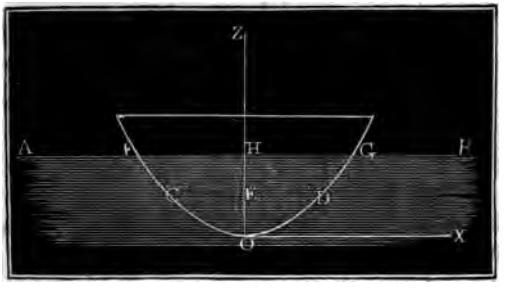
Aus dem Vorstehenden folgt, daß wenn ein Körper in einer schweren Flüssigkeit gewogen wird, er um das Gewicht eines gleichen Volums dieser Flüssigkeit leichter erscheint, als er wirklich ist. Diese Beobachtung kann offenbar sehr bequem dazu benutzt werden, das spezifische Gewicht s eines starren Körpers, welcher schwerer ist, als eine Flüssigkeit, in Beziehung zu dieser Flüssigkeit zu ermitteln. Denn da man unter diesem spezifischen Gewicht das Verhältniß $\frac{W}{W_1}$ versteht, in welchem das absolute Gewicht W des Körpers zu dem Gewichte W_1 einer Flüssigkeitsmenge von demselben Volum steht; so wird dieses spezifische Gewicht s auch

$$s = \frac{W}{W - W_2} \qquad \ldots\ldots (91)$$

sein, worin W das absolute Gewicht des Körpers bezeichnet, wenn derselbe außerhalb, und W_2 dieses Gewicht darstellt, wenn der Körper innerhalb der fraglichen Flüssigkeit gewogen wird, indem offenbar $W - W_2 = W_1$ ist.

§. 24. Tiefe der Einsenkung eines an der Oberfläche einer unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers.

Um jetzt für den Fall, daß ein Körper CDZ an der Oberfläche einer unpreßbaren Flüssigkeit schwimmt, und sein Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmenge FOG in derselben Vertikallinie liegt, die Tiefe der Einsenkung



dieses Körpers in die Flüssigkeit zu bestimmen; so sei AFGB der horizontale Spiegel der Flüssigkeit, O der tiefste Punkt des Körpers ZCOD, eine durch O gelegte Horizontalebene die Koordinatenebene der xy, die in O auf dieser Ebene nach oben errichtete Vertikale OZ die Axe der z; ferner

W das Gewicht des Körpers,
w das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,
$z = OE$ eine beliebige vertikale Abszisse,
$F(z)$ die Größe des horizontalen Querschnittes CD des eingetauchten Körpers im Abstande z vom tiefsten Punkte O,
$Z = OH$ die Tiefe der Einsenkung des schwimmenden Körpers im Zustande des Gleichgewichtes.

Denkt man sich den Raum FOG der verdrängten Flüssigkeit in lauter horizontale Scheiben von unendlich geringer Höhe dz zerlegt; so wird das Volum einer solchen im Abstande z vom Punkte O liegenden Scheibe, wie CD, gleich $F(z)dz$, und demnach das ganze Volum FOG der verdrängten Flüssigkeit

$$\int_0^Z F(z).dz$$

sein. Da nun das Gewicht $w\int_0^Z F(z).dz$ dieser Flüssigkeitsmenge

ist, nach gehöriger Reduktion

$$\arccos\frac{r-Z}{r}-\frac{(r-Z)\sqrt{Z(2r-Z)}}{r^2}=\frac{W}{lr^2w} \quad \ldots\ (100)$$

Eine Auflösung dieser transzendenten Gleichung für Z ergibt den gesuchten Werth der Einsenkung des Zylinders. Man kann diese Gleichung dadurch auf eine etwas einfachere Form bringen, daß man statt der Tiefe Z der Einsenkung den Zentrumswinkel einführt, welcher den eingetauchten Theil des Zylinders überspannt. Denn setzt man den Bogen dieses Winkels in einem Kreise, dessen Halbmesser die Längeneinheit ist, gleich φ; so hat man offenbar

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{r-Z}{r},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{Z(2r-Z)}}{r};$$

folglich

$$\frac{(r-Z)}{r}\cdot\frac{\sqrt{Z(2r-Z)}}{r}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\tfrac{1}{2}\sin\varphi$$

und

$$\frac{\varphi}{2}=\arccos\frac{r-Z}{r}.$$

Substituirt man die letzteren Werthe in Gl. (100); so wird dieselbe

$$\varphi-\sin\varphi=\frac{2W}{lr^2w} \quad \ldots\ (101)$$

§. 27. Tiefe der Einsenkung einer Kugel.

Wenn der Halbmesser der Kugel gleich r ist; so wird ein horizontaler Durchschnitt derselben in einem Abstande $=z$ von ihrem tiefsten Punkte ein Kreis von dem Halbmesser $\sqrt{z(2r-z)}$, also vom Flächeninhalte

$$F(z)=\pi z(2r-z)=\pi(2rz-z^2)$$

sein. Demnach hat man hier

$$\pi\int_0^Z(2rz-z^2)\,dz=\frac{W}{w},$$

d. i.

$$\pi(rZ^2 - \tfrac{1}{3}Z^3) = \frac{W}{w}$$

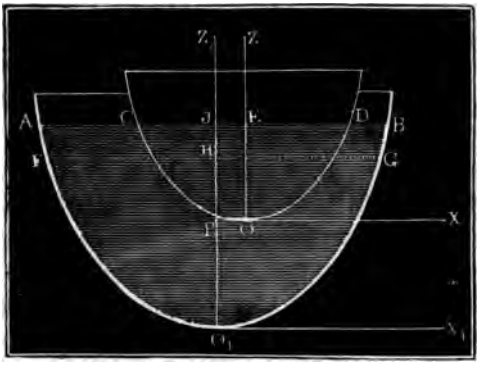
oder

$$Z^3 - 3rZ^2 + \frac{3W}{\pi w} = o \qquad \ldots\ldots (102)$$

Eine Auflösung dieser kubischen Gleichung, welche für Z immer nur Einen positiven reellen Werth darbieten wird, ergibt die gesuchte Einsenkung der Kugel.

§. 28. Senkung eines schwimmenden Körpers in Beziehung zu dem Gefäße, in welchem die Flüssigkeit enthalten ist.

Wenn in dem Gefäße AO_1B eine bestimmte Quantität einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit enthalten ist und der schwim-



mende Körper COD in dieselbe eingesenkt wird; so soll der vertikale Abstand O_1P angegeben werden, in welchem die tiefsten Punkte O_1 und O resp. des Gefäßes und des schwimmenden Körpers voneinander liegen. Zu diesem Ende sei

W das Gewicht des schwimmenden Körpers,

w das Gewicht einer Volumeinheit der im Gefäße AO_1B enthaltenen Flüssigkeit,

O der tiefste Punkt des Körpers und OZ die durch denselben gelegte Vertikale,

F(z) die Größe eines horizontalen Querschnittes des Körpers,

Wurzel. Wenn α und β spitze Winkel oder $\text{tang}\alpha$ und $\text{tang}\beta$ positiv sind; so bietet die vorstehende Gleichung nur Einen Zeichenwechsel dar; dieselbe enthält alsdann auch nur Eine positive Wurzel, welches dann auch die reelle sein muß. Da nun Z jedenfalls nur reell und positiv sein darf; so sieht man, daß unter den vorstehenden Umständen die Gleichung (95) unter den drei möglichen Wurzeln doch nur eine einzige enthalten wird, welche für den wahren Werth von Z genommen werden kann, während die anderen beiden Wurzeln entweder reell und negativ oder imaginär sind. Solches wird sich übrigens auch dann noch nachweisen lassen, wenn $\text{tang}\alpha$ oder $\text{tang}\beta$ oder diese beiden Größen zusammen negativ sind.

Für den Fall, daß zwei gegenüberliegende Seitenwände des Körpers vertikal ständen, daß also z. B. $\beta = 90°$, also $\text{tang}\beta = \infty$ und $\frac{1}{\text{tang}\beta} = o$ wäre, würde man aus Gleichung (94) erhalten, wenn man berücksichtigt, daß das zweite Glied nach gehöriger Reduktion $= \left(\frac{a}{\text{tang}\alpha} + \frac{b}{\text{tang}\beta}\right) Z^2$ ist,

$$abZ + \frac{aZ^2}{\text{tang}\alpha} = \frac{W}{w}.$$

Hieraus folgt

$$Z = -\frac{b}{2}\text{tang}\alpha + \sqrt{\frac{b^2\,\text{tang}^2\alpha}{4} + \frac{W\,\text{tang}\alpha}{aw}} \quad \ldots\ (96)$$

worin die Wurzelgröße nur positiv genommen werden darf, damit Z einen positiven Werth erhält.

Würde auch der Wintel $\alpha = 90°$, also $\text{tang}\alpha = \infty$ und $\frac{1}{\text{tang}\alpha} = o$; so ginge die Form des Körpers in die eines rechtwinkligen Parallepipedums über, und man erhielte aus Gleichung (94)

$$Z = \frac{W}{abw} \quad \ldots\ (97)$$

Ueberhaupt ist leicht zu erkennen, daß bei einem jeden geraden Prisma, dessen Basis $= A$ ist,

$$Z = \frac{W}{A\,w} \qquad \ldots\ldots (98)$$

sein wird, indem man hierfür immer

$$F(z) = A$$

und demnach

$$\int_o^Z F(z).dz = \int_o^Z A\,dz = AZ$$

hat.

Wenn $\beta = 90^o$ und die Seite b der Grundfläche $= o$ wäre; so hätte man statt des früheren Körpers ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Eine Längenkante untergetaucht wäre, und Gleichung (96) würde hierfür ergeben

$$Z = \sqrt{\frac{W \tang \alpha}{a\,w}} \qquad \ldots\ldots (99)$$

§. 26. Tiefe der Einsenkung eines der Länge nach auf der Flüssigkeit schwimmenden Zylinders.

Wenn dieser Zylinder dergestalt belastet ist, daß eine durch seinen Schwerpunkt gelegte Vertikale seine horizontale Axe in der Mitte durchschneidet; so sei l seine Länge, r der Halbmesser seiner beiden Grundflächen und W sein Gewicht. Ein um die Höhe z von seiner tiefsten Seitenlinie abstehender horizontaler Querschnitt wird ein Rechteck resp. von den Seiten l und $2\sqrt{z(2r-z)}$, also von dem Flächeninhalte

$$F(z) = 2l\sqrt{z(2r-z)}$$

bilden. Hiernach hat man wegen Gl. (92)

$$2l\int_o^Z \sqrt{z(2r-z)}.dz = \frac{W}{w},$$

d. i. weil

$$\int \sqrt{z(2r-z)}.dz = -\frac{(r-z)\sqrt{z(2r-z)}}{2} + \frac{r^2}{2}\arccos\frac{r-z}{r}$$

ist, nach gehöriger Reduktion

$$\text{arc cos}\frac{r-Z}{r}-\frac{(r-Z)\sqrt{Z(2r-Z)}}{r^2}=\frac{W}{lr^2w} \quad \ldots\ldots (100)$$

Eine Auflösung dieser transzendenten Gleichung für Z ergibt den gesuchten Werth der Einsenkung des Zylinders. Man kann diese Gleichung dadurch auf eine etwas einfachere Form bringen, daß man statt der Tiefe Z der Einsenkung den Zentrumswinkel einführt, welcher den eingetauchten Theil des Zylinders überspannt. Denn setzt man den Bogen dieses Winkels in einem Kreise, dessen Halbmesser die Längeneinheit ist, gleich φ; so hat man offenbar

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{r-Z}{r},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{Z(2r-Z)}}{r};$$

folglich

$$\frac{(r-Z)}{r}\cdot\frac{\sqrt{Z(2r-Z)}}{r}=\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\tfrac{1}{2}\sin\varphi$$

und

$$\frac{\varphi}{2}=\text{arc cos}\frac{r-Z}{r}.$$

Substituirt man die letzteren Werthe in Gl. (100); so wird dieselbe

$$\varphi-\sin\varphi=\frac{2W}{lr^2w} \quad \ldots\ldots (101)$$

§. 27. Tiefe der Einsenkung einer Kugel.

Wenn der Halbmesser der Kugel gleich r ist; so wird ein horizontaler Durchschnitt derselben in einem Abstande $=z$ von ihrem tiefsten Punkte ein Kreis von dem Halbmesser $\sqrt{z(2r-z)}$, also vom Flächeninhalte

$$F(z)=\pi z(2r-z)=\pi(2rz-z^2)$$

sein. Demnach hat man hier

$$\pi\int_0^Z(2rz-z^2)\,dz=\frac{W}{w},$$

des eingesenkten Theiles CDÔ des schwimmenden Körpers dar. Es folgt also, daß der Raum ABO_1 des Gefäßes, welcher die Quantität Q der Flüssigkeit und den eingetauchten Theil $\frac{W}{w}$ des Körpers enthält, $= Q + \frac{W}{w}$ sein müsse. Da dieser Raum aber auch durch $\int_o^{Z_2} F_1(z).dz$ dargestellt wird; so hat man

$$\int_o^{Z_2} F_1(z).dz = Q + \frac{W}{w} \qquad \ldots\ldots (105)$$

Aus dieser Formel ist die vertikale Höhe $Z_2 = O_1 J$ des Spiegels der Flüssigkeit über dem tiefsten Punkte des Gefäßes zu bestimmen, nachdem der schwimmende Körper in die Flüssigkeit eingesenkt ist.

Die Erhebung $H = HJ$ des Spiegels der Flüssigkeit im Gefäße beim Einsenken des Körpers ist hiernach

$$H = Z_2 - Z_1 \qquad \ldots\ldots (106)$$

Wollte man die Höhe Z_2 oder die Erhebung H des Spiegels beim Eintauchen des schwimmenden Körpers nicht mit Hülfe der gegebenen Quantität Q der im Gefäße enthaltenen Flüssigkeit, sondern dadurch bestimmen, daß man die Höhe $Z_1 = O_1 H$ dieser Flüssigkeit im Gefäße vor der Einsenkung des Körpers als gegeben ansähe; so kann Dies durch die Betrachtung geschehen, daß der Raum ABGF offenbar gleich CDO d. i. $= \frac{W}{w}$ sein muß. Hiernach hat man auch

$$\int_{Z_1}^{Z_2} F_1(z).dz = \frac{W}{w} \qquad \ldots\ldots (107)$$

oder

$$\int_{Z_1}^{Z_1+H} F_1(z).dz = \frac{W}{w} \qquad \ldots\ldots (108)$$

Für den vertikalen Abstand H_1 der beiden Punkte O_1 u
O hat man endlich

$$H_1 = Z_2' - Z \qquad \ldots\ldots (109)$$

§. 29. Fall, wo sowol das Gefäß, wie der schwi
mende Körper gerade und vertikal stehende Prisme
sind.

Setzt man hier den konstanten horizontalen Querschnitt des Körpers

$$F(z) = A$$

und den des Gefäßes

$$F_1(z) = A_1;$$

so ergibt Gl. (103)

$$\int_0^{Z_1} A_1 \, dz = A_1 Z_1 = Q,$$

also für die Höhe Z_1 des Spiegels über dem Boden des Gefäßes, wenn kein Körper eingetaucht wäre,

$$Z_1 = \frac{Q}{A_1} \qquad \ldots\ldots (110)$$

Aus Gl. (104) erhält man

$$\int_0^{Z} A \, dz = AZ = \frac{W}{w},$$

also für die Tiefe der Einsenkung des schwimmenden Körpers

$$Z = \frac{W}{Aw} \qquad \ldots\ldots (111)$$

Aus Gl. (105) folgt

$$\int_0^{Z_2} A_1 \, dz = A_1 Z_2 = Q + \frac{W}{w},$$

mithin für die Höhe des Spiegels der Flüssigkeit über dem Boden des Gefäßes, nachdem der Körper eingetaucht ist,

$$Z_2 = \frac{Q}{A_1} + \frac{W}{A_1 w} \qquad \ldots\ldots (112)$$

Beim Einsenken des Prismas in die Flüssigkeit hebt sich der Spiegel der Letzteren nach Gl. (106), wenn man darin für Z_2 und Z_1 ihre Werthe aus Gl. (112) und (110) setzt um

$$H = \frac{W}{A_1 w}, \qquad \ldots\ldots (113)$$

und nach Gl. (109) steht die horizontale Grundfläche des schwimmenden Körpers vom Boden des Gefäßes um

$$H_1 = \frac{Q}{A_1} + \frac{W}{A_1 w} - \frac{W}{A w} = \frac{Q}{A_1} - \frac{W(A_1 - A)}{w A A_1} \qquad \ldots\ldots (114)$$

ab.

§. 30. Fall, wo sowol das Gefäß, wie der schwimmende Körper ein vertikal stehendes Umwälzungsparaboloid bildet.

Stellt man in diesem Falle die erzeugende Parabel für die Oberfläche des Körpers durch

$$x = \sqrt{pz}$$

und die für die innere Fläche der Gefäßwand durch

$$x = \sqrt{p_1 z}$$

dar; so hat man, da für beide irgend ein horizontaler Querschnitt im Abstande z vom Scheitel ein Kreis vom Halbmesser x ist,

$$F(z) = \pi x^2 = \pi p z$$

und

$$F_1(z) = \pi x^2 = \pi p_1 z.$$

Hiernach ergibt Gl. (103)

$$\int_0^{Z_1} \pi p_1 z\, dz = \tfrac{1}{2} \pi p_1 Z_1^{\,2} = Q,$$

also für die Höhe des Spiegels der Flüssigkeit über dem tiefsten Punkte des Gefäßes, wenn kein Körper in dieselbe eingetaucht wäre,

$$Z_1 = \sqrt{\frac{2Q}{\pi p_1}} \qquad \ldots . (115)$$

Nach Gl. (104) hat man

$$\int_0^Z \pi p z\, dz = \tfrac{1}{2}\pi p Z^2 = \frac{W}{w},$$

also für die Tiefe der Einsenkung des schwimmenden Körpers

$$Z = \sqrt{\frac{2W}{\pi p w}} \qquad \ldots . (116)$$

Aus Gl. (105) folgt

$$\int_0^{Z_2} \pi p_1 z\, dz = \tfrac{1}{2}\pi p_1 Z_2^{\,2} = Q + \frac{W}{w},$$

also für die Höhe des Spiegels der Flüssigkeit über dem tiefsten Punkte des Gefäßes nach der Einsenkung des schwimmenden Körpers

$$Z_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi p_1}\left(Q + \frac{W}{w}\right)} \qquad \ldots . (117)$$

Bei der Einsenkung des Körpers steigt der Spiegel der Flüssigkeit im Gefäße nach Gl. (106) um

$$H = \sqrt{\frac{2}{\pi p_1}\left(Q + \frac{W}{w}\right)} - \sqrt{\frac{2Q}{\pi p_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi p_1}}\left|\sqrt{Q + \frac{W}{w}} - \sqrt{Q}\right| \qquad \ldots . (118)$$

Wollte man die Höhe Z_2 oder die Erhebung H danach bestimmen, daß man die Höhe Z_1 des Spiegels der Flüssigkeit im Gefäße vor der Einsenkung des Körpers als bekannt voraussetzte; so hätte man nach Gl. (107)

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \pi p_1 z\, dz = \tfrac{1}{2}\pi p_1 (Z_2^{\,2} - Z_1^{\,2}) = \frac{W}{w},$$

also

$$Z_2 = \sqrt{Z_1^{\,2} + \frac{2W}{\pi p_1 w}} \qquad \ldots . (119)$$

und nach Gl. (108) oder da $H=Z_2-Z_1$ ist,

$$H=\sqrt{Z_1^2+\frac{2W}{\pi p_1 w}}-Z_1 \qquad \ldots\ldots (120)$$

Der vertikale Abstand H_1 des tiefsten Punktes des schwimmenden Körpers vom tiefsten Punkte des Gefäßes ist nach Gl. (109), wenn man darin für Z_2 und Z die Werthe aus Gl. (117) und (116) setzt,

$$H_1=\sqrt{\frac{2}{\pi p_1}\left(Q+\frac{W}{w}\right)}-\sqrt{\frac{2W}{\pi p w}} \qquad \ldots\ldots (121)$$

oder wenn man für Z_2 und Z die Werthe aus Gl. (119) und (116) setzt,

$$H_1=\sqrt{Z_1^2+\frac{2W}{\pi p_1 w}}-\sqrt{\frac{2W}{\pi p w}} \qquad \ldots\ldots (122)$$

§. 31. Bestimmung der Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Körpers.

In den früheren Paragraphen, in welchen das Gleichgewicht eines an der Oberfläche einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers untersucht ist, sind wir immer von der Voraussetzung ausgegangen, daß der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Vertikallinie liegen werde, und haben dann nur noch die Tiefe zu bestimmen gesucht, um welche der Körper in die Flüssigkeit einsinken mußte, um eine gewisse Quantität der Letzteren zu verdrängen, deren Gewicht seinen eigenen Gewichten gleich war.

Wäre übrigens die Lage des Körpers in Beziehung zu der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher er sich bei vertikaler Einsenkung schwimmend im Gleichgewichte erhalten würde, a priori nicht bekannt; so dient die folgende Betrachtung dazu, den beiden Forderungen des §s 22, nach welchen eine bestimmte Menge der Flüssigkeit verdrängt werden und außerdem der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Vertikallinie liegen muß, ein Genüge zu leisten.

Es sei AOB der schwimmende Körper und D dessen Schwer-

Soll nun die Linie DE auf AB perpendikular stehen; so wenn man EP parallel zu XO zieht, in dem rechtwinkligen Dreiecke DPE der Winkel $DEP = ZCB = \varphi$, ferner $DP = Z_1 - Z$ und $EP = X - X_1$: Die zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Körpers, daß nämlich die beiden Schwerpunkte D und E in derselben Vertikalen liegen, wird also durch die Gleichung

$$Z_1 - Z = (X - X_1) \operatorname{tang} \varphi \qquad \ldots . \quad (124)$$

dargestellt.

In den meisten praktischen Fällen wird man durch die geometrische Anschauung der Figuren sowol für das Volum Q des eingetauchten Körpertheiles, wie für die Koordinaten X und Z des Schwerpunktes desselben leicht auf elementarem Wege Formelausdrücke ableiten können, welche von den Größen $k = OC$ und $\varphi = \angle ZCB$ oder von zwei anderen die Lage der Ebene AB bestimmenden Größen abhängen, um alsdann nach vorgenommener Substitution derselben in die Gleichungen (123) und (124) die gesuchten Werthe für k und φ daraus herzustellen.

Für Fälle, wo eine elementare Behandelung die nöthigen Ausdrücke für Q, X und Z nicht ergeben kann, wo man also zur Anwendung der höheren Analysis schreiten muß, hat man oft nöthig für das Volum eines elementaren Körpertheiles, welcher in und auf der Ebene XZ perpendikular steht, also die Länge $2y$ besitzt, und einen rechtwinkligen Querschnitt von den Seiten dx und dz hat,

$$2y\,dx\,dz,$$

also für einen der Ebene YZ parallelen Körpertheil von unendlich geringer Stärke, welcher im Abstande $OH = x$ von O liegt und in der Ebene XZ die Linie JK zur Höhe hat,

$$\int_{z'}^{z''} 2y\,dx\,dz = 2\,dx \int_{z'}^{z''} y\,dz,$$

und für das ganze zwischen den Punkten A und B liegende Volum ABO

$$Q = 2 \int_{x_1}^{x''} dx \int_{z'}^{z''} y\,dz \qquad (125)$$

und nach Gl. (108) oder da $H=Z_2-Z_1$ ist,

$$H=\sqrt{Z_1^2+\frac{2W}{\pi p_1 w}}-Z_1 \qquad \ldots\ldots (120)$$

Der vertikale Abstand H_1 des tiefsten Punktes des schwimmenden Körpers vom tiefsten Punkte des Gefäßes ist nach Gl. (109), wenn man darin für Z_2 und Z die Werthe aus Gl. (117) und (116) setzt,

$$H_1=\sqrt{\frac{2}{\pi p_1}\left(Q+\frac{W}{w}\right)}-\sqrt{\frac{2W}{\pi p w}} \qquad \ldots\ldots (121)$$

oder wenn man für Z_2 und Z die Werthe aus Gl. (119) und (116) setzt,

$$H_1=\sqrt{Z_1^2+\frac{2W}{\pi p_1 w}}-\sqrt{\frac{2W}{\pi p w}} \qquad \ldots\ldots (122)$$

§. 31. Bestimmung der Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Körpers.

In den früheren Paragraphen, in welchen das Gleichgewicht eines an der Oberfläche einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers untersucht ist, sind wir immer von der Voraussetzung ausgegangen, daß der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Vertikallinie liegen werde, und haben dann nur noch die Tiefe zu bestimmen gesucht, um welche der Körper in die Flüssigkeit einsinken mußte, um eine gewisse Quantität der Letzteren zu verdrängen, deren Gewicht seinen eigenen Gewichten gleich war.

Wäre übrigens die Lage des Körpers in Beziehung zu der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit, in welcher er sich bei vertikaler Einsenkung schwimmend im Gleichgewichte erhalten würde, a priori nicht bekannt; so dient die folgende Betrachtung dazu, den beiden Forderungen des §s 22, nach welchen eine bestimmte Menge der Flüssigkeit verdrängt werden und außerdem der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit in derselben Vertikallinie liegen muß, ein Genüge zu leisten.

Es sei AOB der schwimmende Körper und D dessen Schwer-

Soll nun die Linie DE auf AB perpendikular stehen; so ist wenn man EP parallel zu XO zieht, in dem rechtwinkligen Dreiecke DPE der Winkel $DEP = ZCB = \varphi$, ferner $DP = Z_1 - Z$ und $EP = X - X_1$: Die zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Körpers, daß nämlich die beiden Schwerpunkte D und E in derselben Vertikalen liegen, wird also durch die Gleichung

$$Z_1 - Z = (X - X_1) \operatorname{tang} \varphi \quad \ldots . \quad (124)$$

dargestellt.

In den meisten praktischen Fällen wird man durch die geometrische Anschauung der Figuren sowol für das Volum Q des eingetauchten Körpertheiles, wie für die Koordinaten X und Z des Schwerpunktes desselben leicht auf elementarem Wege Formelausdrücke ableiten können, welche von den Größen $h = OC$ und $\varphi = \angle ZCB$ oder von zwei anderen die Lage der Ebene AB bestimmenden Größen abhängen, um alsdann nach vorgängiger Substitution derselben in die Gleichungen (123) und (124) die gesuchten Werthe für h und φ daraus herzustellen.

Für Fälle, wo eine elementare Behandelung die nöthigen Ausdrücke für Q, X und Z nicht ergeben kann, wo man also zur Anwendung der höheren Analysis schreiten muß, hat man offenbar für das Volum eines elementaren Körpertheiles, welcher in L auf der Ebene XZ perpendikular steht, also die Länge $2y$ besitzt, und einen rechtwinkligen Querschnitt von den Seiten dx und dz hat,

$$2y\,dx\,dz,$$

also für einen der Ebene YZ parallelen Körpertheil von unendlich geringer Stärke, welcher im Abstande $OH = x$ von O liegt, und in der Ebene XZ die Linie JK zur Höhe hat,

$$\int_{z'}^{z''} 2y\,dx\,dz = 2\,dx \int_{z'}^{z''} y\,dz,$$

und für das ganze zwischen den Punkten A und B liegende Volum ABO

$$Q = 2 \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{z'}^{z''} y\,dz \quad (125)$$

In dieſem Ausdrucke iſt

$$y = F(x, z), \qquad \ldots\ldots (126)$$

$$z' = f'(x) \qquad \ldots\ldots (127)$$

und für $z'' = HK = f''(x)$ hat man, weil AB eine gerade Linie $OC = h$, Winkel $ZCB = \varphi$ iſt,

$$z'' = h + \frac{x}{\operatorname{tang}\varphi} \qquad \ldots\ldots (128)$$

Die Werthe für $x_1 = ON$ und $x_2 = OM$ erhält man, indem man die Ausdrücke für z' und z'' aus den Gleichungen (127) einander gleich ſetzt und für x auflöſ't, alſo durch die Gleichung

$$h + \frac{x}{\operatorname{tang}\varphi} = f'(x), \qquad \ldots\ldots (129)$$

welche für x zwei reelle Werthe, und zwar bei der Darſtellung der obigen Figur einen negativen und einen poſitiven Werth liefern muß; der negative Werth iſt $= x_1$ und der poſitive $= x_2$.

Da das Gewicht des Volums $2y\,dx\,dz$ der verdrängten Flüſſigkeit, welches ein in L auf XZ perpendikular ſtehendes Parallelepipedum bildet, gleich $2w\,y\,dx\,dz$ iſt; ſo iſt das Moment dieſes Gewichtes in Beziehung zur Axe OZ

$$2w\,y\,dx\,dz \times x = 2w\,x\,y\,dx\,dz$$

und in Beziehung zur Axe OX

$$2w\,y\,dx\,dz \times z = 2w\,y\,z\,dx\,dz.$$

Das Moment des Gewichtes von dem Theile der verdrängten Flüſſigkeit, deſſen Höhe in der Ebene XZ gleich JK iſt, beträgt alſo in Beziehung zur Axe OZ

$$2w\,x\,dx \int_{y'}^{y''} y\,dz$$

und in Beziehung zur Axe OX

$$2w\,dx \int_{y'}^{y''} y\,z\,dz.$$

Demnach hat man

$$X = \tfrac{1}{2}(s_1 - s)\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \ldots\ldots (133)$$

$$Z = \tfrac{1}{2}(s_1 + s)\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \ldots\ldots (134)$$

Zieht man endlich durch den Punkt J die Linie JM parallel zu AB, so ist $\angle ZJM = ZCB = \varphi$ und man hat

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{KM}{KJ} = \frac{KB + BM}{KO - JO} = \frac{s_1 \sin\frac{\alpha}{2} + s\sin\frac{\alpha}{2}}{s_1\cos\frac{\alpha}{2} - s\cos\frac{\alpha}{2}}$$

d. i.

$$\operatorname{tang}\varphi = \left(\frac{s_1 + s}{s_1 - s}\right)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \qquad \ldots\ldots (135)$$

Durch Substitution dieser Werthe für X, Z und $\operatorname{tang}\varphi$ in Gl. (124) erhält man

$$Z_1 - \tfrac{1}{2}(s_1 + s)\cos\frac{\alpha}{2} = \left[\tfrac{1}{2}(s_1 - s)\sin\frac{\alpha}{2} - X_1\right]\left(\frac{s_1 + s}{s_1 - s}\right)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$(s_1^2 - s^2) - 3X_1(s_1 + s)\sin\frac{\alpha}{2} - 3Z_1(s_1 - s)\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \ldots (136)$$

Eine Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (132) ergibt die korrespondirenden Werthe für s und s_1, welche den verschiedenen Gleichgewichtslagen des schwimmenden Körpers entsprechen.

Für den Fall, daß der Schwerpunkt D des Körpers in der Halbirungslinie OZ des Winkels AOB läge, wo also $X_1 = 0$ wäre, würde sich die Gleichung (136) auf

$$(s_1^2 - s^2) - 3Z_1(s_1 - s)\cos\frac{\alpha}{2} = 0,$$

d. i. auf

$$(s_1 - s)\left(s_1 + s - 3Z_1\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots (137)$$

vereinfachen.

Dieser Gleichung wird zuvörderst durch die Bedingung

$$s_1 - s = 0 \text{ oder } s_1 = s$$

ein Genüge geleistet, was in Verbindung mit der Gleichung (132)

$$s = s_1 = \sqrt{\frac{2W}{wl\sin\alpha}} \quad \ldots\ldots (138)$$

ergibt, worin die Wurzelgröße offenbar nur positiv genommen werden darf.

Ferner wird die Gleichung (137) durch

$$s_1 + s - 3Z_1 \cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

oder durch

$$s_1 + s = 3Z_1 \cos\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots (139)$$

realisirt. Quadrirt man diese Gleichung; so kommt

$$s_1^2 + 2s_1 s + s^2 = 9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2},$$

und wenn man hiervon das Vierfache der Gleichung (132) subtrahirt,

$$s_1^2 - 2s_1 s + s^2 = 9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8W}{wl\sin\alpha},$$

mithin

$$s_1 - s = \pm\sqrt{9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8W}{wl\sin\alpha}} \quad \ldots\ldots (140)$$

Aus dieser und der Gleichung (139) folgt, wenn man zuvörderst die Wurzelgröße positiv nimmt,

$$\left.\begin{aligned} s &= \tfrac{3}{2}Z_1 \cos\frac{\alpha}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8W}{wl\sin\alpha}} \\ s_1 &= \tfrac{3}{2}Z_1 \cos\frac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8W}{wl\sin\alpha}} \end{aligned}\right\} \ldots (141)$$

und wenn man die Wurzelgröße in Gl. (140) negativ nimmt,

$$\left.\begin{aligned} s &= \tfrac{3}{2}Z_1 \cos\frac{\alpha}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8W}{wl\sin\alpha}} \\ s_1 &= \tfrac{3}{2}Z_1 \cos\frac{\alpha}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{9Z_1^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8W}{wl\sin\alpha}} \end{aligned}\right\} \ldots (142)$$

Demnach hat man

$$X = \tfrac{1}{2}(s_1 - s)\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \ldots\ldots (133)$$

$$Z = \tfrac{1}{2}(s_1 + s)\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \ldots\ldots (134)$$

Zieht man endlich durch den Punkt J die Linie JM parallel zu AB, so ist $\angle ZJM = ZCB = \varphi$ und man hat

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{KM}{KJ} = \frac{KB + BM}{KO - JO} = \frac{s_1 \sin\frac{\alpha}{2} + s\sin\frac{\alpha}{2}}{s_1\cos\frac{\alpha}{2} - s\cos\frac{\alpha}{2}}$$

d. i.

$$\operatorname{tang}\varphi = \left(\frac{s_1 + s}{s_1 - s}\right)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} \qquad \ldots\ldots (135)$$

Durch Substitution dieser Werthe für X, Z und $\operatorname{tang}\varphi$ in Gl. (124) erhält man

$$Z_1 - \tfrac{1}{2}(s_1 + s)\cos\frac{\alpha}{2} = \left[\tfrac{1}{2}(s_1 - s)\sin\frac{\alpha}{2} - X_1\right]\left(\frac{s_1 + s}{s_1 - s}\right)\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$(s_1^2 - s^2) - 3X_1(s_1 + s)\sin\frac{\alpha}{2} - 3Z_1(s_1 - s)\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \ldots (136)$$

Eine Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (132) ergibt die korrespondirenden Werthe für s und s_1, welche den verschiedenen Gleichgewichtslagen des schwimmenden Körpers entsprechen.

Für den Fall, daß der Schwerpunkt D des Körpers in der Halbirungslinie OZ des Winkels AOB läge, wo also $X_1 = 0$ wäre, würde sich die Gleichung (136) auf

$$(s_1^2 - s^2) - 3Z_1(s_1 - s)\cos\frac{\alpha}{2} = 0,$$

d. i. auf

$$(s_1 - s)\left(s_1 + s - 3Z_1\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots (137)$$

vereinfachen.

Dieser Gleichung wird zuvörderst durch die Bedingung

Querschnitt des eingetauchten Theiles des schwimmenden Körpers darstellt; so wird der Schwerpunkt E der verdrängten Flüssigkeit mit dem Schwerpunkte des Vierecks AHJB zusammenfallen. Der Voraussetzung gemäß, liegt auch der Schwerpunkt D des ganzen Körpers in der Ebene dieses Vierecks. Wenn O die Mitte der Basis HJ ist; so sei das Perpendikel OZ auf HJ die Axe der z und OX die positive Richtung der Axe der x. Ferner sei

l die auf der Ebene AOB perpendikular stehende Länge des Körpers,

$a = \mathrm{HJ}$,

$\alpha = \angle \mathrm{AHJ} = \angle \mathrm{BJH}$,

$s = \mathrm{HA}$,

$s_1 = \mathrm{JB}$.

Denkt man sich das Viereck AHJB vermittelst einer durch den Punkt A mit HJ parallel gezogenen Linie AK in ein Paralleltrapez AHJK und in ein Dreieck BAK zerlegt und die Perpendikel AL, KM, BN auf HJ gefällt; so hat man

$\mathrm{HL} = \mathrm{JM} = s\cos\alpha$,

$\mathrm{AL} = \mathrm{KM} = s\sin\alpha$,

$\mathrm{JN} = s_1\cos\alpha$, $\mathrm{BN} = s_1\sin\alpha$, mithin

$\mathrm{AK} = a - 2s\cos\alpha$ und

Trapez AHJK gleich $\frac{a+(a-2s\cos\alpha)}{2}.s\sin\alpha = s(a-s\cos\alpha)\sin\alpha$,

Dreieck BAK gleich

$\frac{a-2s\cos\alpha}{2}(s_1\sin\alpha - s\sin\alpha) = \frac{1}{2}(s_1-s)(a-2s\cos)\alpha\sin\alpha$,

mithin Viereck

$$\mathrm{AHJB} = \mathrm{AHJK} + \mathrm{BAK} = \tfrac{1}{2}[a(s_1+s) - 2s_1 s\cos\alpha]\sin\alpha.$$

Hieraus folgt nun statt Gl. (123) zuvörderst die folgende

$$a(s_1+s) - 2s_1 s\cos\alpha = \frac{2W}{wl\sin\alpha} \qquad \ldots\ (143)$$

Um jetzt die Abstände X und Z des Schwerpunktes E des Vierecks AHJB vom Punkte O resp. in paralleler Richtung zu der Axe OX und OZ zu bestimmen; so liegt der Schwerpunkt

E′ des Trapezes AHJK in der Linie OZ und zwar in einem Abſtande

$$OE' = \frac{OP(HJ+2.AK)}{3(HJ+AK)} = \frac{s\sin\alpha\,[a+2(a-2s\cos\alpha)]}{3[a+(a-2s\cos\alpha)]}$$
$$= \frac{s(3a-4s\cos\alpha)\sin\alpha}{6(a-s\cos\alpha)}.$$

Der Schwerpunkt E″ des Dreiecks BAK liegt in der Linie BN und zwar in einem Abſtande $PE'' = \frac{1}{3}.PB$, ſodaß man für deſſen Abſtände vom Punkte O parallel zu den Axen OX und OZ reſp.

$$OG'' = \tfrac{1}{3}.ON = \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{2} - s_1\cos\alpha\right) = \tfrac{1}{6}(a-2s_1\cos\alpha)$$

und

$$G''E'' = NR + \tfrac{1}{3}(NB-NR) = s\sin\alpha + \tfrac{1}{3}(s_1\sin\alpha - s\sin\alpha) = \tfrac{1}{3}(s_1+2s)\sin\alpha$$

hat. Hieraus folgt nun, da das Moment des Vierecks AHJB ſowol in Beziehung zur Axe OZ, wie in Beziehung zur Axe OX gleich der Summe der entſprechenden Momente des Trapezes AHJK und des Dreiecks BAK ſein muß,

$$\tfrac{1}{2}[a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]\sin\alpha.X$$
$$= \tfrac{1}{2}(s_1-s)(a-2s\cos\alpha)\sin\alpha.\tfrac{1}{6}(a-2s_1\cos\alpha)$$

und

$$\tfrac{1}{2}[a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]\sin\alpha.Z$$
$$= s(a-s\cos\alpha)\sin\alpha.\frac{s(3a-4s\cos\alpha)\sin\alpha}{6(a-s\cos\alpha)}$$
$$+\tfrac{1}{2}(s_1-s)(a-2s\cos\alpha)\sin\alpha.\tfrac{1}{3}(s_1+2s)\sin\alpha,$$

mithin nach gehöriger Reduktion

$$X = \tfrac{1}{6}(s_1-s).\frac{a^2-2[a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]\cos\alpha}{a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha} \quad \ldots (144)$$

$$Z = \tfrac{1}{3}\sin\alpha.\frac{(s_1+s)[a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]-as_1s}{a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha} \quad \ldots (145)$$

Endlich iſt $\angle\varphi = ZCB = CBR$, folglich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{AR}{BR} = \frac{a-(s_1+s)\cos\alpha}{(s_1-s)\sin\alpha} \quad \ldots\ldots (146)$$

Führt man diese Werthe für X, Z und tangφ in Gl. (124) ein und reduzirt gehörig; so kommt

$$(s_1-s)\{[2(s_1+s)-3a\cos\alpha][a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]+a(a^2-2s_1s)\}$$
$$-6[a-(s_1+s)\cos\alpha][a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]X_1$$
$$-6(s_1-s)[a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha]\sin\alpha Z_1=o \quad \ldots\ldots (147)$$

oder wenn man für den Faktor $a(s_1+s)-2s_1s\cos\alpha$ den Werth $\frac{2W}{\nu l\sin\alpha}$ aus Gl. (143), den wir der Kürze wegen mit A bezeichnen wollen, und für s_1s den Werth $\frac{a(s_1+s)-A}{2\cos\alpha}$ aus derselben Gleichung substituirt,

$$(s_1-s)\{(s_1+s)(2A\cos\alpha-a^2)+a(1-3\cos^2\alpha)A+a^3\cos\alpha\}$$
$$-6[a-(s_1+s)\cos\alpha]AX_1-6(s_1-s)\sin\alpha AZ_1=o \quad \ldots\ldots (148)$$

Wenn der Schwerpunkt D des schwimmenden Körpers in der Linie OZ liegt, wenn also $X_1=o$ ist; so reduzirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$(s_1-s)\{(s_1+s)(2A\cos\alpha-a^2)+a(1-3\cos^2\alpha)A+a^3\cos\alpha\}$$
$$-6(s_1-s)\sin\alpha AZ_1=o \quad \ldots\ldots (149)$$

Dieser und der Gleichung (143) wird zuvörderst durch die Werthe

$$s=s_1=\frac{a}{2\cos\alpha}-\frac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{a^2-4A\cos\alpha} \quad \ldots\ldots (150)$$

ein Genüge geleistet, worin die Wurzelgröße nur positiv genommen werden darf, weil $\frac{a}{2\cos\alpha}$ die Länge der Seite HZ des gleichschenkligen Dreiecks HJZ darstellt, und $s=HA$, sowie $s_1=JB$ nothwendig kleiner sein muß, als eine solche Seite HZ oder JZ.

Nachdem man die Gleichung (149) durch den Faktor s_1-s dividirt hat, bleibt die Gleichung

$$(s_1+s)(2A\cos\alpha-a^2)+a(1-3\cos^2\alpha)A+a^3\cos\alpha-6\sin\alpha AZ_1=o.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$a^2-2A\cos\alpha=B,$$
$$a(1-3\cos^2\alpha)A+a^3\cos\alpha-6\sin\alpha AZ_1=C;$$

E′ des Trapezes AHJK in der Linie OZ und zwar in einem Abstande

$$OE' = \frac{OP(HJ+2.AK)}{3(HJ+AK)} = \frac{s\sin\alpha\,[a+2(a-2s\cos\alpha)]}{3[a+(a-2s\cos\alpha)]}$$
$$= \frac{s(3a-4s\cos\alpha)\sin\alpha}{6(a-s\cos\alpha)}.$$

Der Schwerpunkt E″ des Dreiecks BAK liegt in der Linie BP und zwar in einem Abstande $PE'' = \frac{1}{3}.PB$, sodaß man für dessen Abstände vom Punkte O parallel zu den Axen OX und OZ resp.

$$OG'' = \tfrac{1}{3}.ON = \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{2} - s_1\cos\alpha\right) = \tfrac{1}{6}(a-2s_1\cos\alpha)$$

und

$$G''E'' = NR + \tfrac{1}{3}(NB-NR) = s\sin\alpha + \tfrac{1}{3}(s_1\sin\alpha - s\sin\alpha) = \tfrac{1}{3}(s_1+2s)\sin\alpha$$

hat. Hieraus folgt nun, da das Moment des Vierecks AHJB sowol in Beziehung zur Axe OZ, wie in Beziehung zur Axe OX gleich der Summe der entsprechenden Momente des Trapezes AHJK und des Dreiecks BAK sein muß,

$$\tfrac{1}{2}[a(s_1+s)-2s_1 s\cos\alpha]\sin\alpha.X$$
$$= \tfrac{1}{2}(s_1-s)(a-2s\cos\alpha)\sin\alpha.\tfrac{1}{6}(a-2s_1\cos\alpha)$$

und

$$\tfrac{1}{2}[a(s_1+s)-2s_1 s\cos\alpha]\sin\alpha.Z$$
$$= s(a-s\cos\alpha)\sin\alpha.\frac{s(3a-4s\cos\alpha)\sin\alpha}{6(a-s\cos\alpha)}$$
$$+\tfrac{1}{2}(s_1-s)(a-2s\cos\alpha)\sin\alpha.\tfrac{1}{3}(s_1+2s)\sin\alpha,$$

mithin nach gehöriger Reduktion

$$X = \tfrac{1}{6}(s_1-s).\frac{a^2-2[a(s_1+s)-2s_1 s\cos\alpha]\cos\alpha}{a(s_1+s)-2s_1 s\cos\alpha} \quad \ldots (144)$$

$$Z = \tfrac{1}{3}\sin\alpha.\frac{(s_1+s)[a(s_1+s)-2s_1 s\cos\alpha]-as_1 s}{a(s_1+s)-2s_1 s\cos\alpha} \quad \ldots (145)$$

Endlich ist $\angle\varphi = ZCB = CBR$, folglich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{AR}{BR} = \frac{a-(s_1+s)\cos\alpha}{(s_1-s)\sin\alpha} \quad \ldots . (146)$$

$$s = s_1 = \frac{W}{wla} = \frac{A}{2a} \quad \ldots\ldots (155)$$

und für die beiden schiefen Lagen

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{A}{2a} \mp \frac{1}{2a}\sqrt{12aZ_1A - 3A^2 - 2a^4} \\ s_1 &= \frac{A}{3a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{12aZ_1A - 3A^2 - 2a^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (156)$$

wobei ebenfalls zu bemerken ist, daß die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen in den Gleichungen (156) positiv sein und überhaupt die Werthe von s und s_1 aus diesen Gleichungen positiv ausfallen müssen, wenn der Körper im Stande sein soll, auch in den beiden schiefen Lagen zu schwimmen.

Stabilität schwimmender Körper.

§. 34. Allgemeine Bedingungen für die Stabilität eines schwimmenden Körpers. — Metazentrum.

Wenn den in §. 22 angegebenen Bedingungen eines an der Oberfläche einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers ein Genüge geleistet ist; so befindet sich derselbe im Zustande des Gleichgewichtes. Dieses Gleichgewicht ist *stabil*, sobald der Körper nach irgend einer ungemein kleinen Verrückung aus seiner Gleichgewichtslage ein Bestreben hat, in diese Lage wieder zurückzukehren. *Instabil* ist das Gleichgewicht, sobald der Körper bei einer jeden sehr kleinen Verrückung ein Bestreben äußert, sich nur noch mehr von der anfänglichen Gleichgewichtslage zu entfernen. Wäre das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers von der Art, daß sich bei sehr kleinen Verrückungen nach gewissen Richtungen Stabilität, bei ähnlichen Verrückungen nach gewissen anderen Richtungen aber Instabilität zeigte; so würde dasselbe in Beziehung auf Stabilität und Instabilität ein *gemischtes* sein.

Es sei AB die Oberfläche der Flüssigkeit, AMB der schwimmende Körper in der natürlichen Lage des Gleichgewichtes, F der Schwerpunkt der vom Körper verdrängten Flüssigkeit und G der Schwerpunkt des Körpers. Die beiden Punkte F und G

so wird die vorstehende und die Gleichung (143) noch durch folgende zwei Werthe für s und s_1

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{C}{2B} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{C^2}{B^2} - \frac{2(aC-BA)}{B\cos\alpha}} \\ s_1 &= \frac{C}{2B} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{C^2}{B^2} - \frac{2(aC-BA)}{B\cos\alpha}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (151)$$

von denen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, erfüllt.

Die letzteren Werthe für s und s_1 entsprechen zwei schiefen, einander ähnlichen Lagen des Gleichgewichtes. Man sieht jedoch, daß um dem hier betrachteten Körper die nöthige Schwimmfähigkeit zu ertheilen, es sowol in der ersten, wie in den letzten beiden Lagen erforderlich ist, daß resp. die Ausdrücke unter den Wurzelzeichen in Gl. (150) und in den Gleichungen (151) positiv seien, und daß überhaupt die Werthe von s und s_1 nicht negativ werden.

Die obigen Formeln gelten auch für den Fall, wo der Winkel $AHJ = BJH = \alpha$ stumpf wird, der schwimmende Körper also die Form eines Pontons annimmt.

Für den Fall, daß $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und der eingetauchte Theil des Körpers ein rechtwinkliges Parallelepipedum ist, werden die letzteren Formeln (150) und (151) unzulänglich. Unter diesen Umständen reduziren sich die Gleichungen (143) und (147 auf

$$a(s_1+s) = \frac{2W}{wl} = A \qquad \ldots\ldots (152)$$

$$\begin{aligned} &a(s_1-s)[2(s_1^2+s_1 s+s^2)+a^2] - 6a^2(s_1+s)X_1 \\ &-6a(s_1-s)(s_1+s)Z_1 = o \qquad \ldots\ldots (153) \end{aligned}$$

Wenn der Schwerpunkt des Körpers in der Axe OZ liegt, also $X_1 = o$ ist, vereinfacht sich die letztere Gleichung auf

$$(s_1-s)[2(s_1^2+s_1 s+s^2)+a^2] - 6(s_1-s)(s_1+s)Z_1 = o \ldots\ldots (154)$$

Die Werthe von s und s_1, welche den drei möglichen Gleichgewichtslagen entsprechen, welche also den Gleichungen (152) und (154) ein Genüge leisten, sind für die aufrechte Lage

$$s = s_1 = \frac{W}{wla} = \frac{A}{2a} \quad \ldots\ldots (155)$$

und für die beiden schiefen Lagen

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{A}{2a} \mp \frac{1}{2a}\sqrt{12aZ_1 A - 3A^2 - 2a^4} \\ s_1 &= \frac{A}{3a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{12aZ_1 A - 3A^2 - 2a^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (156)$$

wobei ebenfalls zu bemerken ist, daß die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen in den Gleichungen (156) positiv sein und überhaupt die Werthe von s und s_1 aus diesen Gleichungen positiv ausfallen müssen, wenn der Körper im Stande sein soll, auch in den beiden schiefen Lagen zu schwimmen.

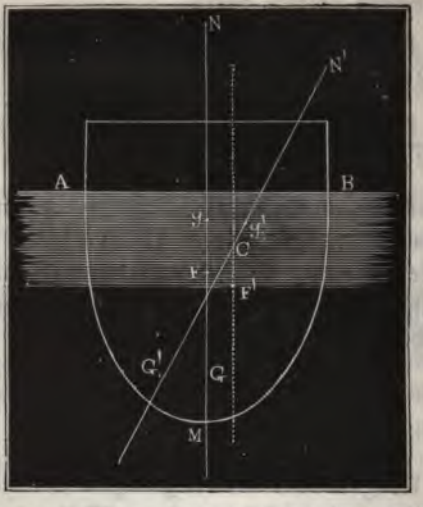
Stabilität schwimmender Körper.

§. 34. Allgemeine Bedingungen für die Stabilität eines schwimmenden Körpers. — Metazentrum.

Wenn den in §. 22 angegebenen Bedingungen eines an der Oberfläche einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit schwimmenden Körpers ein Genüge geleistet ist; so befindet sich derselbe im Zustande des Gleichgewichtes. Dieses Gleichgewicht ist *stabil*, sobald der Körper nach irgend einer ungemein kleinen Verrückung aus seiner Gleichgewichtslage ein Bestreben hat, in diese Lage wieder zurückzukehren. *Instabil* ist das Gleichgewicht, sobald der Körper bei einer jeden sehr kleinen Verrückung ein Bestreben äußert, sich nur noch mehr von der anfänglichen Gleichgewichtslage zu entfernen. Wäre das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers von der Art, daß sich bei sehr kleinen Verrückungen nach gewissen Richtungen Stabilität, bei ähnlichen Verrückungen nach gewissen anderen Richtungen aber Instabilität zeigte; so würde dasselbe in Beziehung auf Stabilität und Instabilität ein *gemischtes* sein.

Es sei **AB** die Oberfläche der Flüssigkeit, **AMB** der schwimmende Körper in der natürlichen Lage des Gleichgewichtes, **F** der Schwerpunkt der vom Körper verdrängten Flüssigkeit und **G** der Schwerpunkt des Körpers. Die beiden Punkte **F** und **G**

liegen nach §. 22 nothwendig in derselben Vertikalen NG, und das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers besteht darin, daß



einer vertikalen von oben nach unten durch den Punkt G wirkenden, dem Gewichte des Körpers gleichen Kraft eine zweite ebenso große durch den Punkt F von unten nach oben wirkende Kraft entgegen strebt.

Angenommen, man ändere die gegenwärtige Lage des schwimmenden Körpers so, daß der Schwerpunkt G in G′ und die Linie NG in N′G′ zu liegen kommen. Nach dieser Verrückung sei F′ die Lage des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit. Man hat alsdann den schwimmenden Körper als der Wirkung zweier vertikaler Kräfte unterworfen anzusehen, von denen die Eine in dem Punkte G′ von oben nach unten wirkt und immer dem Gewichte des Körpers gleich ist, und von denen die andere in dem Punkte F′ von unten nach oben wirkt und dem Gewichte der in der neuen Lage verdrängten Flüssigkeit gleich ist. Die Wirkung dieser beiden Kräfte wird immer streben 1) den Schwerpunkt G′ des Körpers vertikal von unten nach oben oder von oben nach unten zu bewegen, jenachdem die verdrängte Flüssigkeitsmenge größer oder kleiner ist, als sie es in der natürlichen Gleichgewichtslage war, 2) den schwimmenden Körper um eine horizontale Axe zu drehen, welche durch den Schwerpunkt G′ geht und

auf der Vertikalebene perpendikular steht, in welcher die Punkte G′ und F′ liegen.

Betrachten wir die geneigte Ebene, welche diese horizontale Axe nebst der Linie N′G′ enthalten würde, und welche auf der Ebene der obigen Figur perpendikular sei; so leuchtet ein, daß wenn die Linie N′G′, wie in der Figur, nach der rechten Seite geneigt ist und der Punkt F′ sich rechts vom Punkte G′ befindet, die dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleiche Kraft, welche im Punkte F′ von unten nach oben wirkt, die Linie N′G′ in die vertikale Lage zurückzuführen streben wird, während diese Kraft, wenn sich der Punkt F′ links vom Punkte G′ befände, die Linie N′G′ immer mehr und mehr nach der rechten Seite zu neigen streben würde. Oder denkt man sich durch den Punkt F′ eine Vertikale gelegt, welche die Linie N′G′ in C schneidet; so wird der Körper seine frühere Lage wieder anzunehmen streben, wenn sich der Punkt C über G′ befindet, während der Körper sich immer mehr und mehr nach derselben Seite zu neigen streben wird, wenn der Punkt C unter G′ fällt. Der Punkt C wird nach Bouguer das Matazentrum genannt.

Wäre der Schwerpunkt des Körpers, welcher vorhin bei der natürlichen Gleichgewichtslage in G angenommen ist, in g, und hätte sich derselbe nach g' verrückt; so befände sich das Matazentrum C unterhalb g', und der schwimmende Körper würde ein Bestreben haben, sich immer mehr und mehr zu neigen. Käme jedoch der Schwerpunkt F′ der verdrängten Flüssigkeit bei dieser Verrückung rechts von g' oder das Metazentrum C oberhalb g' zu liegen; so würde der Körper in seine frühere Lage zurückzukehren streben. Setzt man hiernach alles Übrige gleich; so kann durch eine bloße Verlegung des Schwerpunktes des schwimmenden Körpers herbeigeführt werden, daß der Letztere ein Bestreben erhält, in seine natürliche Gleichgewichtslage zurückzukehren, oder sich von ihr zu entfernen.

Denkt man sich den schwimmenden Körper aus seiner natürlichen Lage des Gleichgewichtes gebracht und alsdann der Wirkung der gedachten Kräfte überlassen; so sieht man, daß wenn das Metazentrum für alle möglichen Lagen dieses Körpers über seinen Schwerpunkt zu liegen kommt, die Kräfte immer ein Bestreben äußern werden, den Körper in seine natürliche Gleichge-

wichtslage zurückzuführen, und daß mithin sein Gleichgewicht *stabil* sein wird. Liegt dagegen für alle möglichen Lagen des schwimmenden Körpers das Matazentrum *unter* dem Schwerpunkte; so werden die Kräfte immer streben, den Körper von seiner Gleichgewichtslage mehr und mehr zu entfernen, und das Gleichgewicht wird daher *instabil* sein. Kann sich das Metazentrum für verschiedene Verrückungen des schwimmenden Körpers *bald über und bald unter* seinem Schwerpunkte befinden; so wird das Gleichgewicht in Beziehung auf Stabilität und Instabilität ein *gemischtes* sein, dessen Zustand man nicht genau bestimmen kann, ohne die Natur der Bewegungen zu untersuchen, welche der aus seiner Gleichgewichtslage gebrachte Körper annehmen wird.

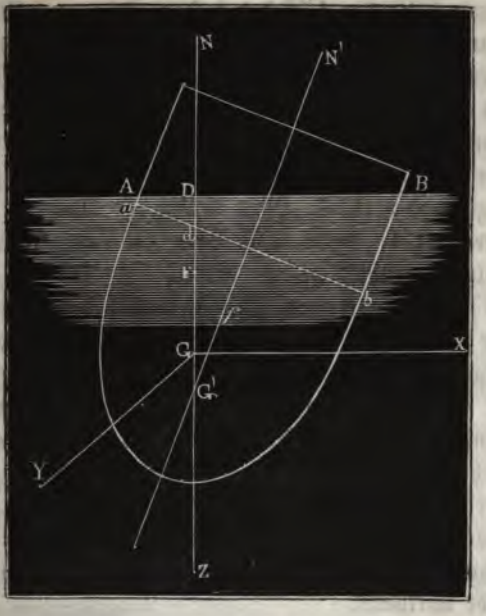
§. 35. *Bewegungen eines aus seiner Gleichgewichtslage gebrachten schwimmenden Körpers.*

Wenn die Verrückung des schwimmenden Körpers sehr klein angenommen wird; so kann man auf eine allgemeine Weise die auf die Figur des Körpers oder auf die Vertheilung der Gewichte, mit denen er belastet ist, bezüglichen Bedingungen ausdrücken, von welchen die Stabilität oder Instabilität seines Gleichgewichtes abhängen. Es wird hierbei von der Bewegung der Flüssigkeit abgesehen, und angenommen, daß dieselbe fortwährend auf den Körper dieselbe Wirkung ausübe, welche stattfinden würde, wenn der Körper in der jedesmaligen Lage unbeweglich wäre.

Nach den allgemeinen Prinzipien der Mechanik (vergl. unter Anderem die Zusätze zum zweiten Abschnitte in meiner Übersetzung des Moseleyschen Werkes über die Anwendung der Mechanik auf Ingenieurkunst) kann man immer für sich betrachten 1) die Bewegung des Schwerpunktes des Körpers, welche stattfindet, wie wenn die ganze Masse des Körpers in diesem Punkte vereinigt wäre und alle Kräfte auf denselben angebracht wären; 2) die Umdrehungsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt, welche in derselben Weise stattfindet, wie wenn dieser Punkt fest wäre.

Wenn **AB** immer die obere Fläche der Flüssigkeit ist, so sei, wie vorhin, **G** der Schwerpunkt des Körpers im natürlichen Zustande des Gleichgewichtes, **NG** die durch diesen Punkt gehende

Vertikale, F die Lage des Schwerpunktes der vom Körper verdrängten Flüssigkeit in jener Vertikalen. Es werde der Punkt G zum Anfangspunkte der horizontalen Koordinaten x, y und



der vertikalen z angenommen, von denen die z von oben nach unten gerechnet werden. Ferner denke man sich den schwimmenden Körper dergestalt verrückt, daß der Schwerpunkt G nach G' niedergesenkt sei, ohne aus der Vertikalen NG zu kommen, daß die Linie NG in die Lage N'G' und der Punkt F auf dieser Linie in die Lage f gebracht sei, indem der Abstand fG' gleich FG bleibt. Die Ebene, welche in dem natürlichen Zustande des Gleichgewichtes des Körpers mit AB zusammenfiel, hat sich gesenkt und geneigt, indem sie perpendikular zu N'G' geblieben ist, und ihr Durchschnitt mit der Ebene XY ist jetzt ab, sodaß der Abstand Dd gleich GG' genommen werden kann, wenn man eine unendlich kleine Größe des zweiten Grades vernachlässigt. Endlich bezeichne

Q das Volum der von dem Körper in dem natürlichen Zustande des Gleichgewichtes verdrängten Flüssigkeit,

A die Fläche des Durchschnittes des horizontalen Spiegels AB

der Flüſſigkeit mit dem Körper, welche bei der ſehr geringen Verrückung des Körpers während der ganzen Dauer der Bewegung als konſtant angeſehen werden kann,

h der Abſtand GF oder G′f der beiden Schwerpunkte des Körpers und der im natürlichen Zuſtande des ſchwimmenden Körpers verdrängten Flüſſigkeit (in der Figur iſt der Punkt G unter F angenommen; läge G über F, ſo müßte in den nachſtehenden Formeln das Zeichen von h überall in das entgegengeſetzte verwandelt werden),

ζ die ſehr geringe vertikale Höhe GG′ oder Dd, um welche der Schwerpunkt G unter ſeine Lage im natürlichen Zuſtande des Gleichgewichtes geſenkt iſt,

α, β, γ die ungemein kleinen Winkel, welche die Linie NG reſp. um die Axe der x, der y und der z beſchrieben hat, um aus der Lage NG in die Lage N′G′ zu kommen (die Winkel α und β werden hier als poſitiv gerechnet, wenn ſie einer Drehung reſp. in den Richtungen YZ und XZ entſprechen, wodurch eine Senkung des Theiles XGY der Ebene der xy herbeigeführt werden würde),

ϖ das Gewicht einer Volumeinheit der Flüſſigkeit,

g die Geſchwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in der Sekunde mittheilt.

Es kommt zuvörderſt darauf an, die Kräfte zu beſtimmen, von welchen der ſchwimmende Körper in ſeiner gegenwärtigen Lage angegriffen wird. Dieſelben beſtehen offenbar 1) aus dem Gewichte des Körpers, welches dem Gewichte der im natürlichen Zuſtande des Gleichgewichtes verdrängten Flüſſigkeit, alſo gleich ϖQ iſt, und welches im Punkte G′ von oben nach unten wirkt, 2) aus einer Kraft gleich dem Gewichte der im natürlichen Zuſtande des Gleichgewichtes verdrängten Flüſſigkeit, welches gleichfalls durch ϖQ ausgedrückt iſt und im Punkte f von unten nach oben wirkt, 3) in dem Gewichte der zwiſchen den beiden Ebenen AB und ab enthaltenen Flüſſigkeit, welches ebenfalls von unten nach oben wirkt. Was die horizontalen Preſſungen gegen die Oberfläche des Körpers betrifft, ſo heben ſich dieſelben nach allen Richtungen hin auf, und man braucht keine Rückſicht darauf zu nehmen.

Um die Gleichungen für die Bewegung des Körpers herzu-

ſtellen, müſſen die eben erwähnten Kräfte und ihre Momente in Beziehung zu den Koordinatenaxen als Funktionen der Größen $\zeta, \alpha, \beta, \gamma$ ausgedrückt werden.

Hinſichtlich der Kraft $w\,Q$, welche im Punkte f vertikal von unten nach oben wirkt, ſo ſind ihre Momente in Beziehung zu zwei Linien, welche parallel zu den Axen der x und der y durch den Schwerpunkt G' gelegt ſind, offenbar reſp. $w\,Q.h\sin\alpha$ und $w\,Q.h\sin\beta$, oder da wegen der Kleinheit der Winkel α und β $\sin\alpha = \alpha$ und $\sin\beta = \beta$ geſetzt werden kann,

$$w\,Q\,h\,\alpha \text{ und } w\,Q\,h\,\beta.$$

In Betreff des Gewichtes der zwiſchen den beiden Ebenen AB und ab enthaltenen Flüſſigkeit bemerkt man, daß wenn man in der Ebene AB einen Punkt nimmt, deſſen horizontale Koordinaten x und y ſind, die Länge der Vertikalen von dieſem Punkte bis in die Ebene ab gleich $\zeta + x\sin\beta + y\sin\alpha$ oder $= \zeta + x\beta + y\alpha$ ſein wird. Das Gewicht einer Flüſſigkeitsſäule, welche dieſe Höhe und den Querſchnitt $dx.dy$ hat, wird alſo $w\,dx\,dy(\zeta + x\beta + y\alpha)$ ſein, während die Momente derſelben in Beziehung zu den Axen der x und y reſp. $w\,dx\,dy(\zeta + x\beta + y\alpha)y$ und $w\,dx\,dy(\zeta + x\beta + y\alpha)x$ ſind. Hieraus folgt für das Gewicht der zwiſchen AB und ab enthaltenen Flüſſigkeit

$$w\iint(\zeta + x\beta + y\alpha)\,dx\,dy$$

und für die Momente dieſes Gewichtes in Beziehung zu zwei Linien, welche parallel zu den Axen der x und der y durch den Punkt G' gelegt ſind, reſp.

$$w\iint(\zeta + x\beta + y\alpha)\,y\,dx\,dy,$$

$$w\iint(\zeta + x\beta + y\alpha)\,x\,dx\,dy,$$

worin die Integrale in der ganzen Ausdehnung der Ebene AB zu nehmen ſind.

Zur Vereinfachung der vorliegenden Unterſuchung nehmen wir nun an, die äußere Form des ſchwimmenden Körpers ſei von der Beſchaffenheit, daß derſelbe bei der aufrechten Lage ſo-

wol durch die Ebene XZ, wie durch die Ebene YZ in zwei ſymmetriſche Hälften zertheilt werden könne, wie Dies bei der Form eines Schiffes hinſichtlich der Einen dieſer Ebenen ganz genau, hinſichtlich der anderen aber näherungsweiſe ſtattfindet. Ein jeder zur Ebene XY parallele Querſchnitt wird alsdann ſowol in Beziehung zu einer mit GX, wie auch in Beziehung zu einer mit GY parallel gezogenen Linie ſymmetriſch ſein.

Nun bemerkt man, daß man für eine jede beliebige Form des Körpers

$$\iint dx\,dy = \mathrm{A}$$

haben wird. Unter den oben gemachten Vorausſetzungen iſt ferner

$$\iint x\,dx\,dy = \int dy \int x\,dx = o,$$

ebenſo

$$\iint y\,dx\,dy = \int dx \int y\,dy = o,$$

und auch

$$\iint xy\,dx\,dy = \int y\,dy \int x\,dx = o,$$

weil in dieſen doppelten Integralen, ſowol das Integral $\int x\,dx$, wie das Integral $\int y\,dy$ wegen der ſymmetriſchen Form der Fläche A zwiſchen zwei Gränzen genommen werden muß, welche einander gleich und dem Zeichen nach entgegengeſetzt ſind.

Setzt man endlich der Kürze wegen

$$\iint y^2\,dx\,dy = \mathrm{M}, \qquad \ldots\ldots (157)$$

$$\iint x^2\,dx\,dy = \mathrm{N}; \qquad \ldots\ldots (158)$$

ſo reduzirt ſich der obige Ausdruck für das Gewicht der zwiſchen den Ebenen AB und ab enthaltenen Flüſſigkeit auf

$$w\mathrm{A}\zeta,$$

und die Ausdrücke für die Momente dieſes Gewichtes in Beziehung zu zwei Aren, welche reſp. der Are GX und GY parallel ſind und durch den Schwerpunkt G′ gehen, werden reſp.

$$w\mathrm{M}\alpha$$

und

$$w\mathrm{N}\beta.$$

Die Größen M und N können während der ganzen Dauer der Bewegung als konstant angesehen werden.

Aus dem Vorstehenden ersieht man

1) daß wenn man alle Kräfte am Schwerpunkte G′ anbringt, eine vertikale von unten nach oben wirkende Kraft gleich

$$w\mathrm{A}\zeta \qquad \ldots . \quad (159)$$

zurückbleibt;

2) daß die Momente der Kräfte, welche das System um die zu GX parallele und um die zu GY parallele Axe in den Richtungen ZY und ZX zu drehen streben, sodaß dadurch die Winkel α und β vermindert werden, resp.

$$w(h\mathrm{Q}+\mathrm{M})\alpha \qquad \ldots . \quad (160)$$

und

$$w(h\mathrm{Q}+\mathrm{N})\beta \qquad \ldots . \quad (161)$$

sind.

Was das Moment der Kräfte betrifft, welche das System um die Axe GZ zu drehen streben; so ist sein Werth gleich null, da die horizontalen Kräfte sich nach allen Richtungen gegenseitig aufheben.

Um hiernach zuvörderst die Gleichung für die Bewegung des Schwerpunktes des schwimmenden Körpers aufzustellen; so nehme man an, der Körper sei in Bewegung, und die Werthe der Größen ζ, α, β, γ, welche in die obigen Formeln eintreten, seien diejenigen, welche am Ende der Zeit t stattfinden. Beachtet man hierbei, daß die Kraft $w\mathrm{A}\zeta$, welche den Körper von unten nach oben hebt, in einer Richtung wirkt, welche der Richtung der positiven z gerade entgegengesetzt ist; so hat man für die gesuchte Gleichung

$$\frac{w\mathrm{Q}}{g}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -w\mathrm{A}\zeta$$

oder

$$\frac{\mathrm{Q}}{g}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\mathrm{A}\zeta \qquad \ldots . \quad (162)$$

zu setzen. (Vergl. u. A. die dritte der Formeln (a) in den Zu-

sätzen zum zweiten Abschnitte meiner Übers. des oben erwähnten Moseleyschen Werkes.)

Nach den Formeln (*b*) auf S. 198 dieser Übersetzung hat man zur Bestimmung der Umdrehungsbewegungen des Körpers um seinen Schwerpunkt resp. um Linien, welche den Axen GX, GY, GZ parallel sind und durch den Punkt G′ gehen,

$$\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\Sigma(Yz-Zy),$$

$$\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\Sigma(Zx-Xz),$$

$$\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma(Xy-Yx),$$

worin m das Volum irgend eines Massentheilchens des schwimmenden Körpers an einem Orte bezeichnet, dessen Koordinaten x, y, z sind, während μ das Gewicht einer Volumeinheit der Körpermasse an diesem Orte und X, Y, Z die auf das Element m in den Richtungen GX, GX, GZ angebrachten Kräfte sind. Hierbei stellen sich die Momente $(Xy-Yx)$, $(Zx-Xz)$, $(Yz-Zy)$ als positiv heraus, wenn sie Drehungen um die Axen GZ, GY, GX resp. in den Richtungen YX, XZ, ZY hervorbringen.

Dem absoluten Werthe nach hat man hier

$$\Sigma(Yz-Zy)=w(hQ+M)\alpha,$$

$$\Sigma(Zx-Xz)=w(hQ+N)\beta$$

und

$$\Sigma(Xy-Yx)=o;$$

da aber die Kräfte eine Drehung um die Axe GY in der Richtung ZX zu bewirken streben; so hat man das entsprechende Moment $w(hQ+N)\beta$ negativ zu nehmen. Demnach erhält man statt der obigen drei Gleichungen für die Umdrehungsbewegungen um den Schwerpunkt

$$\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=w(hQ+M)\alpha$$

$$\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-w(hQ+N)\beta$$

$$\frac{1}{g}\Sigma\mu m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0$$

Um jetzt die zweiten Differenziale von x, y, z durch die zweiten Differenziale der Winkel α, β, γ auszudrücken, hat man das auf S. 205 ff. der vorhin erwähnten Übersetzung angegebene Verfahren einzuschlagen. Beachtet man hierbei, daß bei den dortigen Bezeichnungen α, β, γ resp. die Winkelgeschwindigkeiten um die Axen GZ, GY, GX in den Richtungen YZ, XZ, ZY darstellen, während hier α, β, γ die am Ende der Zeit t um die Axen GX, GY, GZ in den Richtungen YZ, XZ, YX beschriebenen Winkel darstellen; so leuchtet ein, daß zwischen den dortigen und den hier gebrauchten Größen die Beziehungen

$$a\,dt = d\gamma,\ \beta\,dt = d\beta,\ \gamma\,dt = -d\alpha$$

stattfinden, sodaß man statt der Gleichungen auf S. 206 hier

$$dx = y\,d\gamma - z\,d\beta,$$
$$dy = -x\,d\gamma - z\,d\alpha,$$
$$dz = x\,d\beta + y\,d\alpha,$$

mithin auch

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y\frac{d^2\gamma}{dt^2} - z\frac{d^2\beta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -x\frac{d^2\gamma}{dt^2} - z\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = x\frac{d^2\beta}{dt^2} + y\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

hat.

Führt man diese Werthe in die obige Gleichung ein; so kann man der Kürze wegen

$$\Sigma\mu m(y^2+z^2) = \iiint \mu\,dx\,dy\,dz\,(y^2+z^2) = \mathrm{F}, \quad \ldots \quad (163)$$

$$\Sigma\mu m(x^2+z^2) = \iiint \mu\,dx\,dy\,dz\,(x^2+z^2) = \mathrm{G}, \quad \ldots \quad (164)$$

$$\Sigma\mu m(x^2+y^2) = \iiint \mu\,dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) = \mathrm{H} \quad \ldots \quad (165)$$

setzen, worin die Integrale für die ganze Ausdehnung des schwimmenden Körpers zu nehmen sind. Unter der Voraussetzung, daß der Körper in Beziehung zu den Ebenen XZ und YZ symmetrisch belastet sei, hat man offenbar

$$\Sigma\mu myz = \iiint \mu\, dx\, dy\, dz\, yz = o,$$

$$\Sigma\mu mxz = \iiint \mu\, dx\, dy\, dz\, xz = o,$$

$$\Sigma\mu mxy = \iiint \mu\, dx\, dy\, dz\, xy = o,$$

und demnach reduziren sich die drei Gleichungen für die Umdrehungsbewegungen auf

$$\frac{1}{g} F \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -w(hQ+M)\alpha, \qquad \ldots\ (166)$$

$$\frac{1}{g} G \frac{d^2\beta}{dt^2} = -w(hQ+N)\beta, \qquad \ldots\ (167)$$

$$\frac{1}{g} H \frac{d^2 y}{dt^2} = o \qquad \ldots\ (168)$$

Wenn man die Werthe von ζ, α, β, γ, welche der äußersten Lage G′N′ entsprechen, in welche die Linie GN bei der Verrückung des schwimmenden Körpers aus seiner natürlichen Lage des Gleichgewichtes gebracht ist, resp. mit ζ_1, α_1, β_1, γ_1 bezeichnet, und annimmt, daß die Geschwindigkeit des Körpers in dieser Lage gleich null sei; so ergibt die Integration der Gleichungen (162) und (166) bis (168)

$$\zeta = \zeta_1 \cos t \sqrt{\frac{g\overline{A}}{Q}} \qquad \ldots\ (169)$$

$$\alpha = \alpha_1 \cos t \sqrt{\frac{gw(hQ+M)}{F}} \qquad \ldots\ (170)$$

$$\beta = \beta_1 \cos t \sqrt{\frac{gw(hQ+N)}{g}} \qquad \ldots\ (171)$$

$$\gamma = \gamma_1 \qquad \ldots\ (172)$$

Bei dieser Integration der beiden Gleichungen (166) und (167) ist vorausgesetzt, daß die Größen $(hQ+M)$ und $(hQ+N)$ wesentlich positiv seien. Wären dieselben negativ, also $-(hQ+M)$ und $-(hQ+N)$ positiv; so würden die Integrale jener beiden Gleichungen

$$\alpha = \alpha_1 e^{t\sqrt{\frac{-gw(hQ+M)}{F}}} \quad \ldots\ldots (173)$$

$$\beta = \beta_1 e^{t\sqrt{\frac{-gw(hQ+N)}{G}}} \quad \ldots\ldots (174)$$

sein, während die Integrale der beiden übrigen Gleichungen (162) und (168) stets durch die Formeln (169) und (172) dargestellt wären.

Aus der Gleichung (169) erkennt man, daß der Schwerpunkt des Körpers, nachdem er aus seiner natürlichen Lage G des Gleichgewichtes gebracht ist, unter allen Umständen oszillatorische Bewegungen um jene Lage G in vertikaler Richtung einschlagen wird, deren Mittelpunkt G und deren Amplitude $= 2\zeta_1$ ist.

Aus den Gleichungen (170) und (171) folgt, daß der Körper auch um die Linie GN stets in regelmäßige Schwingungen gerathen wird, welche sich als zwei voneinander unabhängige Schwingungen resp. um die horizontalen Axen GX und GY darstellen, sofern nur eine jede der beiden Größen $(hQ+M)$ und $(hQ+N)$ positiv ist.

Wären die eben erwähnten beiden Größen negativ; so zeigen die beiden Gleichungen (173) und (174), daß der Körper alsdann um die Axen GX und GY keine Oszillationen vollführen, sondern Bewegungen einschlagen wird, welche ihn nur immer noch mehr von seiner natürlichen Lage des Gleichgewichtes entfernen.

Im Falle die Eine jener beiden Größen positiv, die andere dagegen negativ wäre, würde der Körper um die entsprechende der beiden Axen GX oder GY regelmäßig oszilliren, in Beziehung zur anderen Axe würde sich derselbe jedoch immer weiter von der ursprünglichen Lage abwenden.

Für den besonderen Fall, wo irgend Eine der beiden in Rede stehenden Größen null wären, würde sich die entsprechende Gleichung (170) oder (171) auf

$$\alpha = \alpha_1 \text{ oder } \beta = \beta_1$$

reduziren, sodaß alsdann der Körper kein Bestreben haben würde, sich um die Axe GX oder GY zu drehen.

Die Gleichung (172) lehrt endlich, daß der Körper um die vertikale Axe GZ nie eine Umdrehungsbewegung annehmen wird.

Aus dem Vorstehenden folgt unzweideutig, daß das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers in jeder Richtung stabil sein wird, sobald die beiden Größen $(hQ+M)$ und $(hQ+N)$ positiv sind, ferner, daß dieses Gleichgewicht nach allen Richtungen instabil sein wird, sobald die eben erwähnten beiden Größen negativ sind, auch, daß das fragliche Gleichgewicht in Beziehung auf Stabilität und Instabilität ein gemischtes sein wird, wenn die Eine jener beiden Größen positiv, die andere aber negativ ist, und endlich, daß der Körper bei jeder kleinen Verrückung im Gleichgewichte bleiben wird, sobald die beiden fraglichen Größen null sind.

Aus den Gleichungen (169) bis (171) folgt zugleich, daß bei stabilem Gleichgewichte die Dauer der sehr kleinen Schwingungen, welche der Körper resp. in vertikaler Richtung und um die horizontalen Axen GX und GY vollführt (d. i. die Zeiten, in welchen die Werthe der Größen ζ, α, β von ζ_1, α_1, β_1, bis $-\zeta_1$, $-\alpha_1$, $-\beta_1$ und umgekehrt variiren) durch die Ausdrücke

$$\pi\sqrt{\frac{Q}{gA}},\quad \pi\sqrt{\frac{F}{gw(hQ+M)}},\quad \pi\sqrt{\frac{G}{gw(hQ+N)}} \quad \ldots.(175)$$

dargestellt sind, worin π die Verhältnißzahl 3,141... bezeichnet. Diese Schwingungszeiten sind offenbar denen eines einfachen Pendels gleich, dessen Länge resp.

$$\frac{Q}{A},\quad \frac{F}{w(hQ+M)},\quad \frac{G}{w(hQ+N)} \qquad \ldots. (176)$$

ist.

Aus der Vergleichung der vorstehenden Werthe (175) für verschiedene Fahrzeuge kann man schließen, ob ihre Bewegungen sanfter oder härter sind.

§. 36. Stabilität eines schwimmenden parallelepipedischen Körpers.

Wäre der im vorhergehenden Paragraphe betrachtete Körper ein Parallelepipedum von homogener Masse, dessen rechtwinklige Kanten a, b, c sind und dessen Gewicht für jede Volumeinheit gleich w' ist, und will man dessen Stabilität in einer Lage betrachten, in welcher Eine Kante vertikal, die anderen beiden also

horizontal sind; so nehme man an, die Richtungen der Kanten a, b, c entsprechen resp. den Richtungen der obigen Axen der x, der y und der z.

Das Volum der verdrängten Flüssigkeit wird hier

$$Q = abc\frac{w'}{w}$$

sein. Die Tiefe der Einsenkung des Parallelepipedums beträgt $c\frac{w'}{w}$, also der Abstand des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit von der unteren Basis $\frac{c}{2}\frac{w'}{w}$, während der Abstand des Schwerpunktes des Körpers von derselben Basis gleich $\frac{c}{2}$ ist. Hiernach stehen diese beiden Schwerpunkte um $\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\frac{w'}{w} = \frac{c}{2}\frac{w-w'}{w}$ voneinander ab. Da aber der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers hier, wo $w > w'$ ist, über dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit liegt; so hat man in den früheren Formeln h negativ zu nehmen, also

$$h = -\frac{c}{2}\frac{w-w'}{w}$$

zu setzen.

Ferner hat man nach den Gleichungen (157) und (158)

$$M = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\,dy = \frac{ab^3}{12}$$

und

$$N = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy = \frac{a^3 b}{12},$$

folglich

$$hQ + M = \frac{ab}{12}\left[-bc^2\frac{(w-w')w'}{w^2} + b^2\right]$$

$$hQ + N = \frac{ab}{12}\left[-bc^2\frac{(w-w')w'}{w^2} + a^2\right]$$

Aus dem Vorstehenden folgt unzweideutig, daß das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers in jeder Richtung stabil sein wird, sobald die beiden Größen $(hQ+M)$ und $(hQ+N)$ positiv sind, ferner, daß dieses Gleichgewicht nach allen Richtungen instabil sein wird, sobald die eben erwähnten beiden Größen negativ sind, auch, daß das fragliche Gleichgewicht in Beziehung auf Stabilität und Instabilität ein gemischtes sein wird, wenn die Eine jener beiden Größen positiv, die andere aber negativ ist, und endlich, daß der Körper bei jeder kleinen Verrückung im Gleichgewichte bleiben wird, sobald die beiden fraglichen Größen null sind.

Aus den Gleichungen (169) bis (171) folgt zugleich, daß bei stabilem Gleichgewichte die Dauer der sehr kleinen Schwingungen, welche der Körper resp. in vertikaler Richtung und um die horizontalen Axen GX und GY vollführt (d. i. die Zeiten, in welchen die Werthe der Größen ζ, α, β von ζ_1, α_1, β_1, bis $-\zeta_1$, $-\alpha_1$, $-\beta_1$ und umgekehrt variiren) durch die Ausdrücke

$$\pi\sqrt{\frac{Q}{gA}},\ \pi\sqrt{\frac{F}{gw(hQ+M)}},\ \pi\sqrt{\frac{G}{gw(hQ+N)}} \quad \ldots.(175)$$

dargestellt sind, worin π die Verhältnißzahl 3,141... bezeichnet. Diese Schwingungszeiten sind offenbar denen eines einfachen Pendels gleich, dessen Länge resp.

$$\frac{Q}{A},\ \frac{F}{w(hQ+M)},\ \frac{G}{w(hQ+N)} \quad \ldots. (176)$$

ist.

Aus der Vergleichung der vorstehenden Werthe (175) für verschiedene Fahrzeuge kann man schließen, ob ihre Bewegungen sanfter oder härter sind.

§. 36. Stabilität eines schwimmenden parallelepipedischen Körpers.

Wäre der im vorhergehenden Paragraphe betrachtete Körper ein Parallelepipedum von homogener Masse, dessen rechtwinklige Kanten a, b, c sind und dessen Gewicht für jede Volumeinheit gleich w' ist, und will man dessen Stabilität in einer Lage betrachten, in welcher Eine Kante vertikal, die anderen beiden also

horizontal sind; so nehme man an, die Richtungen der Kanten a, b, c entsprechen resp. den Richtungen der obigen Axen der x, der y und der z.

Das Volum der verdrängten Flüssigkeit wird hier

$$Q = abc\frac{w'}{w},$$

sein. Die Tiefe der Einsenkung des Parallelepipedums beträgt $c\frac{w'}{w}$, also der Abstand des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit von der unteren Basis $\frac{c}{2}\frac{w'}{w}$, während der Abstand des Schwerpunktes des Körpers von derselben Basis gleich $\frac{c}{2}$ ist. Hiernach stehen diese beiden Schwerpunkte um $\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\frac{w'}{w} = \frac{c}{2}\frac{w-w'}{w}$ voneinander ab. Da aber der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers hier, wo $w > w'$ ist, über dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit liegt; so hat man in den früheren Formeln h negativ zu nehmen, also

$$h = -\frac{c}{2}\frac{w-w'}{w}$$

zu setzen.

Ferner hat man nach den Gleichungen (157) und (158)

$$M = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\,dy = \frac{ab^3}{12}$$

und

$$N = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy = \frac{a^3 b}{12},$$

folglich

$$hQ + M = \frac{ab}{12}\left[-bc^2\frac{(w-w')w'}{w^2} + b^2\right]$$

$$hQ + N = \frac{ab}{12}\left[-bc^2\frac{(w-w')w'}{w^2} + a^2\right]$$

gungen, welche dieser Körper resp. in vertikaler Richtung und um die zu den Kanten a und b parallelen Axen vollführt,

$$\pi\sqrt{\frac{c}{g}},\ \pi\sqrt{\frac{c}{g}\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)},\ \pi\sqrt{\frac{c}{g}\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)} \quad \ldots\ (178)$$

Die Schwingungsdauer in vertikaler Richtung entspricht derjenigen eines einfachen Punktes von der Länge der vertikalen Kante c.

Nimmt man an, das zuletzt betrachtete Prisma von einer Dichtigkeit, welche gleich der der Flüssigkeit selbst ist, dessen obere Endfläche also bei seiner natürlichen Lage des Gleichgewichtes mit dem Spiegel der Flüssigkeit in derselben Horizontalebene liegen wird, werde nur in vertikaler Richtung aus jener ursprünglichen Gleichgewichtslage gebracht; so kann man sich statt desselben ein gleiches Volum der Flüssigkeit selbst substituirt denken. Die vertikalen oszillatorischen Bewegungen dieses Prismas, welche offenbar von dem horizontalen Querschnitte desselben unabhängig sind, liefern alsdann näherungsweise das Bild der regelmäßigen Hebungen und Senkungen, welche man bei der Wellenbewegung der unpreßbaren Flüssigkeiten beobachtet. Aus dem Obigen geht hervor, daß die Hebungen und Senkungen des Spiegels einer solchen Flüssigkeit beim Wellenschlage zwar isochron sein werden, daß die Schwingungsdauer aber von der Tiefe der in Bewegung gesetzten Flüssigkeitsmasse abhängig ist, indem die tiefer gehenden Wellen eine langsamere Oszillationsbewegung annehmen, als die seichteren.

§. 37. Stabilität einer schwimmenden Kugel.

Angenommen, der in §. 35 betrachtete schwimmende Körper sei eine Kugel von homogener Masse; ihr Halbmesser sei r und das Gewicht einer Volumeinheit derselben gleich der Hälfte des Gewichtes einer Volumeinheit der Flüssigkeit, also gleich $\frac{w}{2}$, sodaß bei der natürlichen Lage des Gleichgewichtes der Mittelpunkt der Kugel im Niveau des Spiegels der Flüssigkeit liegt und

$$A = \pi r^2$$

ist.

Für das Volum der verdrängten Flüssigkeit wird man

$$Q = \tfrac{2}{3}\pi r^3$$

haben. Der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt hier um $\frac{3}{8}r$ unter dem Schwerpunkte des schwimmenden Körpers. Demzufolge hat man

$$h = -\tfrac{3}{8}r$$

zu setzen.

Wenn man sich durch den Mittelpunkt der Kugel, welche hier auch deren Schwerpunkt bildet, die beiden horizontalen Axen der x und der y gelegt denkt; so hat man nach den Gleichungen (157) und (158)

$$M = \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} y^2\,dy = \tfrac{2}{3}\int_{-r}^{+r} (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$N = \int_{-r}^{+r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} x^2\,dx = \tfrac{2}{3}\int_{-r}^{+r} (r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy = \frac{\pi r^4}{4}$$

Hiernach ist

$$hQ+M = -\frac{\pi r^4}{4}+\frac{\pi r^4}{4} = o,$$

$$hQ+N = -\frac{\pi r^4}{4}+\frac{\pi r^4}{4} = o,$$

woraus nach §. 35 folgt, daß die in Rede stehende Kugel bei jeder Verrückung aus ihrer natürlichen Gleichgewichtslage kein Bestreben äußern wird, sich um die horizontalen Axen zu drehen. Die Oszillationen in vertikaler Richtung haben jedoch nach dem ersten der Ausdrücke (175) eine Dauer gleich

$$\pi\sqrt{\frac{2r}{3g}}, \qquad \ldots\ldots (179)$$

was der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge $\frac{2}{3}r$ entspricht.

les der Abſziſſenaxe negativ zu nehmen iſt; ſo hat man als Differenzialgleichung der Oberfläche AMB

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{fx}{(f-v^2)y}$$

oder

$$fx\,dx+(f-v^2)y\,dy=0.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$fx^2+(f-v^2)y^2=C, \qquad \ldots\ldots (179)$$

worin C eine Konſtante bezeichnet, welche durch die Bedingung zu beſtimmen iſt, daß die geſammte Maſſe der Flüſſigkeit einen gegebenen Raum einnehme.

Wenn $v^2<f$ iſt; ſo muß C nothwendig poſitiv ſein, und man ſieht, daß die Flüſſigkeit alsdann die Geſtalt eines Umwälzungsellipſoides annehmen wird, deſſen kleine Axe die Umdrehungsaxe AB iſt. Dieſer Fall entſpricht der Bildung unſeres Erdkörpers, bei welchem die Anziehungskraft f, mit der ein Atom im Abſtande gleich der Längeneinheit vom Mittelpunkte nach dem Letzteren angezogen wird, bedeutend größer iſt, als die in der Längeneinheit von der Umdrehungsaxe ſtattfindende Zentrifugalkraft v^2. Außerdem variirt auch bei unſerer Erde die Kraft f ſehr nahe in direktem Verhältniſſe mit dem Abſtande vom Mittelpunkte, wenn ſich die Geſtalt der ganzen Maſſe nicht ſehr von der Kugelform entfernt; dies Geſetz für die Variation der Kraft f bei der Erde entſpricht alſo auch ſehr nahe der bei der vorſtehenden Unterſuchung gemachten Annahme.

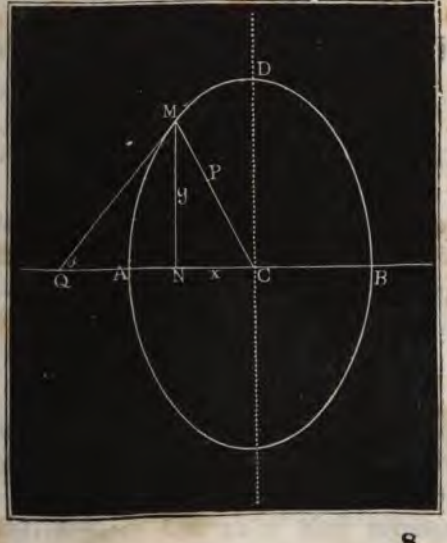
Je mehr die Umdrehungsgeſchwindigkeit v geſteigert wird, deſto mehr nimmt die große Axe des Ellipſoides zu und die kleine ab. In dem Augenblicke, wo $v^2=f$ würde, zerflöſſe die ganze Maſſe in eine unendliche Ebene, welche auf der Umdrehungsaxe im Mittelpunkte C perpendikular ſtände.

Wenn $v^2>f$ wäre; ſo würde die obige Gleichung (179) eine Hyperbel darſtellen, und die Flüſſigkeit müßte ein Umwälzungshyperboloid um die reelle oder imaginäre Axe bilden, jenachdem C poſitiv oder negativ wäre. Da ſich jedoch ſchon für $v^2=f$ die ganze Flüſſigkeit in eine unendliche Ebene ausbreitet; ſo folgt, daß dieſelbe für $v^2>f$ keine zuſammenhängende Maſſe mehr bilden kann, und nach allen Seiten von der Umdre-

sare hinweggeschleudert werden würde. Außerdem würde
nn die vorstehende Rechnung auf einen der Gravitation un-
rfenen Körper schon deshalb nicht mehr anwendbar sein,
sich bei einer so abnormen Abweichung von der Kugelge-
das angenommene Gesetz für die Veränderlichkeit der An-
ngskraft mit dem Abstande vom Mittelpunkte ganz und gar
t. Übrigens behält das vorstehende Resultat für den Fall
Wichtigkeit, daß man sich die Flüssigkeit in feste Wände
schlossen denkt, welche ihre äußere Form nicht ändern kön-
Die Gleichung (179) wird alsdann immer noch die in die-
Flüssigkeit sich bildenden Flächen von gleichem Niveau oder
em Drucke darstellen, welche in dem zuletzt betrachteten Falle
bings hyperbolische Umwälzungsflächen sein können.

§. 39. Bestimmung des in irgend einem Punkte der zen Flüssigkeit herrschenden Druckes.

Wenn **P** irgend ein Punkt im Inneren der vorhin betrach-
elliptischen flüssigen Masse ist, von welcher angenommen
, daß sie sich nur wenig von der Kugelgestalt entferne; so
PM ein durch P und den Mittelpunkt gezogener Vektorra-



dius $CM = R$, $CP = r$, $MP = R - r = z$ und der Winkel MCD (welcher die Breite oder Polhöhe des Ortes M auf der Erdkugel angeben würde) $= \beta$.

Die Kraft, mit welcher ein Theilchen von der Masse m, welches in der Linie CM und in einem beliebigen Abstande ϱ von dem Mittelpunkte liegt, nach dem Mittelpunkte angezogen wird, ist $mf\varrho$ und die Komponente der auf dieses Theilchen wirkenden Zentrifugalkraft in der Richtung CM ist $mv^2\varrho\cos^2\beta$; demnach die gesammte in der Richtung MC auf die Masse m wirkende Kraft $= m\varrho(f - v^2\cos^2\beta)$, und auf die Masseneinheit bezogen $= \varrho(f - v^2\cos^2\beta)$. Bezeichnet man die konstante Dichtigkeit oder die in Einer Volumeinheit enthaltenen Masseneinheiten mit μ; so ist der Werth der vorstehenden Kraft, auf die Volumeinheit der Flüssigkeit im Punkte P bezogen, gleich

$$\mu\varrho(f - v^2\cos^2\beta).$$

Substituirt man diesen Werth für $\mu f\cos\vartheta$ in Gleichung (11), indem man das Integral von M bis P nimmt und beachtet, daß der Druck p in der freien Oberfläche bei M gleich o ist; so erhält man für den im Punkte P herrschenden Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit

$$q = -\int_R^r \mu\varrho(f - v^2\cos^2\beta)\,d\varrho = -\mu(f - v^2\cos^2\beta)\int_R^r \varrho\,d\varrho$$

d. i.

$$q = \tfrac{1}{2}\mu(R^2 - r^2)(f - v^2\cos\beta) = \tfrac{1}{2}\mu z(2R - z)(f - v^2\cos^2\beta) \quad \ldots(180)$$

Wenn man $z = MP$ unendlich klein $= dz$ annimmt; so verschwindet in dem vorstehenden Ausdrucke z gegen $2R$, und man erhält für den Druck der Flüssigkeit in der Tiefe dz unter der Oberfläche bei M und auf die Flächeneinheit

$$q = \mu R(f - v^2\cos^2\beta)\,dz.$$

Dieser Druck stellt offenbar, wenn man sich unter der in Rede stehenden flüssigen Masse den Erdkörper denkt, auch das Gewicht einer Flüssigkeitssäule im Punkte M dar, deren vertikale Höhe ungemein klein $= dz$ und deren horizontale Basis

gleich der Flächeneinheit ist. Da in der Volumeinheit $\frac{1}{dz}$ solcher Schichten enthalten sind; so folgt, daß das Gewicht w der Volumeinheit der Flüssigkeit im Punkte M der Oberfläche

$$w = \mu R(f - v^2 \cos^2\beta) \quad \ldots\ldots (181)$$

ist. Da dieses Gewicht auch durch μg dargestellt wird (§. 2); so hat man auch

$$g = R(f - v^2 \cos^2\beta) \quad \ldots\ldots (182)$$

Diese Gleichung zeigt, in welcher Weise die Größe g oder die Geschwindigkeit, welche die Schwere den irdischen Körpern an der Oberfläche der Erde mittheilt, mit der Länge des Halbmessers $CM = R$ und der geographischen Breite $MCD = \beta$ variirt.

Kennt man den Werth g_1 von g, welcher einer gegebenen Breite β_1 und dem zugehörigen Halbmesser R_1 entspricht, sodaß

$$g_1 = R_1(f - v^2 \cos^2\beta_1)$$

ist; so findet man nach Elimination der Größe f zwischen dieser und der vorhergehenden Gleichung (182)

$$g = g_1 \frac{R}{R_1}\left[1 + \frac{R_1 v^2}{2g_1}(\cos 2\beta_1 - \cos 2\beta)\right] \quad \ldots\ldots (183)$$

Wenn die Werthe g_1 und R_1 für die geographische Breite von $\beta_1 = 45^0$ bekannt wären; so würde man einfach $\cos 2\beta_1 = o$, also

$$g = g_1 \frac{R}{R_1}\left(1 - \frac{R_1 v^2}{2g_1}\cos 2\beta\right) \quad \ldots\ldots (184)$$

haben.

Man sieht, daß dieser Werth der Größe g immer noch von dem Halbmesser $CM = R$ des Punktes M abhängt, für welchen man die Wirkung der Schwerkraft bestimmen will. Da die Ermittelung dieses Werthes von R für eine gegebene Breite einige Umständlichkeit verursacht; so hat Laplace zur Berechnung des Werthes von g folgende Näherungsformel

$$g = g_1(1 - 0{,}002857 \cos 2\beta)$$

angegeben. Eine Vergleichung der hieraus ſich ergebenden Werthe mit denjenigen, welche ſich aus den bekannten, in der 23ſten der phyſikaliſchen Tabellen von Schubarth zuſammengeſtellten Pendellängen folgern laſſen, zeigt, daß der Werth von g im Allgemeinen genauer durch die Formel

$$g = g_1 (1 - 0{,}0027 \cos 2\beta) \qquad \ldots\ (185)$$

dargeſtellt wird. Der Werth von g_1 für eine Breite von 45° iſt 31,2425 Fuß rheinl., ſodaß

$$g = 31{,}2425 (1 - 0{,}0027 \cos 2\beta)$$

iſt.

Wenn man, wie vorhin, den mittleren Halbmeſſer bei einer Breite von 45° mit R_1, den Halbmeſſer unter dem Äquator oder bei einer Breite von 0° mit R' und den Halbmeſſer unter den Polen oder bei einer Breite von 90° mit R'' bezeichnet; ſo ergeben ſich aus der Gleichung (180), wenn man darin $z = R$ ſetzt, für den im Mittelpunkte der Erde ſtattfindenden Druck folgende drei Ausdrücke

$$q = \tfrac{1}{2}\mu R'^2 (f - v^2) \text{ oder } \tfrac{1}{2}\mu R_1^{\,2}\left(f - \frac{v^2}{2}\right) \text{ oder } \tfrac{1}{2}\mu R''^2 f \ldots\ (186)$$

jenachdem man darin für β und R die zuſammengehörigen Werthe o und R', 45° und R_1 90° und R'' ſubſtituirt. Da dieſe drei Werthe von q einander gleich ſein müſſen; ſo hat man

$$R'^2 (f - v^2) = R_1^{\,2}\left(f - \frac{v^2}{2}\right) = R''^2 f,$$

woraus für das Verhältniß des Halbmeſſers R'' unter den Polen zu dem Halbmeſſer R' unter dem Äquator

$$\frac{R''}{R'} = \sqrt{\frac{f - v^2}{f}} \qquad \ldots\ (187)$$

folgt. Setzt man hierin für f den Werth

$$f = \frac{g_1}{R_1} + \frac{v^2}{2}, \qquad \ldots\ (188)$$

welcher ſich aus Gl. (182) ergibt, wenn man darin $g = g_1$, $R = R_1$, $\beta = 45°$ ſubſtituirt; ſo kommt

$$\frac{R''}{R'} = \sqrt{\frac{\frac{2g_1}{v^2 R_1} - 1}{\frac{2g_1}{v^2 R_1} + 1}} \quad \ldots\ldots (189)$$

IV. Das Gleichgewicht der schweren elastischen Flüssigkeiten.

Beziehungen zwischen den auf eine elastische Flüssigkeit wirkenden Kräften, den inneren Pressungen und den Flächen von gleichem Niveau.

§. 40. Allgemeine Beziehung zwischen dem Volum einer gegebenen Quantität einer elastischen Flüssigkeit und der in derselben herrschenden Spannung. — Mariotteſches Geſetz.

Betrachten wir irgend einen physischen Körper, indem wir von der Wirkung der Schwere auf denselben zuvörderst abstrahiren; nehmen wir auch an, derselbe sei prismatisch und habe überall einen Querschnitt gleich der Flächeneinheit. Wenn der Körper flüssig ist, hat man sich denselben zwischen festen prismatischen Wänden eingeschlossen zu denken. Dieser Körper befinde sich anfänglich in seinem natürlichen Zustande, in welchem sich die inneren Anziehungs- und Abstoßungskräfte zwischen seinen Massenelementen ohne Zuthun äußerlich auf den Körper angebrachter Kräfte im Gleichgewichte erhalten, und der Körper kein Bestreben zeigt, seine Form zu ändern. Dieser Körper werde durch eine in der Richtung seiner Längenaxe angebrachte Kraft zusammengedrückt, sodaß er einen kleineren Raum einnimmt, indem sich seine Länge verkürzt.

Es bezeichne

L die Länge des Körpers im natürlichen Zustande,
L_1 die Länge desselben in einem komprimirten Zustande,
L_2 die Länge desselben in einem anderen komprimirten Zustande,
p_1 die Kraft, welche fähig ist, den Körper bis auf die Länge L_1 zu komprimiren,

p_2 die Kraft, welche fähig ist, den Körper bis auf die Länge L_2 zu komprimiren,

E die Kraft, welche fähig ist, den Körper bis auf seine halbe Länge zu komprimiren.

Aus den allgemeinen Gesetzen der Elastizität, wie ich sie im fünften Abschnitte meiner Übersetzung des Moseleyschen Werkes über die mechanischen Prinzipien der Ingenieurwissenschaften näher erläutert habe, folgt, daß die Kraft E, welche man den Elastizitätsmodel nennt, eine konstante, von der Länge L des Stabes im naturlichen Zustande unabhängige Größe ist, und im §. 348 der gedachten Übersetzung findet man, daß

$$p_2 = E\,\frac{L - L_2}{L_2}, \text{ also } E = p_2\,\frac{L_2}{L - L_2}$$

ist. Ebenso hat man

$$p_1 = E\,\frac{L - L_1}{L_1},$$

also auch, wenn man für E den vorstehenden Werth substituirt,

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_2 \cdot \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{L - L_1}{L - L_2} \\ \text{oder} \\ \frac{p_1}{p_2} &= \frac{L_2}{L_1} \cdot \frac{L - L_1}{L - L_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (190)$$

Wäre nun L unendlich groß, während L_1 und L_2 endliche Größen wären, oder hätte der Körper ein Bestreben, in seinem natürlichen Zustande eine unendlich große Länge anzunehmen, wie es bei gasförmigen Körpern näherungsweise der Fall ist; so würde der Faktor

$$\frac{L - L_1}{L - L_2} = 1 + \frac{L_2 - L_1}{L - L_2} = 1,$$

und demnach die Gleichung (190) einfach

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{L_2}{L_1} \qquad \ldots\ldots (191)$$

werden.

Hieraus folgt, daß bei einem flüssigen prismatischen Körper

der vorstehenden Art die gegen seine Endflächen angebrachten Druckkräfte und demnach auch die in seinem Inneren stattfindenden Pressungen auf die Flächeneinheit sich umgekehrt zu einander verhalten, wie die Längen oder wie die Volumen, welche derselbe unter der Wirkung jener Kräfte annimmt.

Hätte der Körper nicht ein Bestreben, bei Hinwegnahme aller äußeren Druckkräfte sich ins Unendliche auszudehnen, sondern wäre die Länge L desselben im natürlichen Zustande nur sehr groß im Vergleich zu L_1 und L_2, wie es bei allen gasförmigen Körpern oder elastischen Flüssigkeiten wahrscheinlich der Fall ist; so würde die Formel (191) nur näherungsweise Gültigkeit haben, und streng genommen, würde man sich der Formeln (190) zu bedienen haben. Hätte man in diesem Falle die beiden Längen L_1 und L_2 und die zugehörigen Druckkräfte p_1 und p_2 beobachtet; so würde man daraus auf die Länge L des Körpers im natürlichen Zustande schließen können, indem

$$L = \frac{(p_1 - p_2) L_1 L_2}{p_1 L_1 - p_2 L_2} \quad \ldots\ldots (192)$$

ist.

Verstehen wir unter einer **vollkommenen elastischen** Flüssigkeit eine solche, von welcher ein prismatischer Stab im natürlichen Zustande eine unendliche Länge annehmen würde; so hat man für dieselbe nach Gl. (191) $p_1 L_1 = p_2 L_2$, oder wenn man die korrespondirenden Werthe der Größen L_2 und p_2 kennt, und das konstante Produkt $p_1 L_1 = c$ setzt,

$$p_2 L_2 = c \text{ oder } p_2 = \frac{c}{L_2} \quad \ldots\ldots (193)$$

Wenn der Querschnitt des bisher betrachteten prismatischen Körpers nicht gerade Eine Flächeneinheit enthielte, sondern allgemein gleich a wäre; so würde man offenbar die obigen Formeln beibehalten können, wenn man unter p_1 und p_2 die Druckkräfte für jede Flächeneinheit des Querschnittes a oder die inneren Pressungen auf die Flächeneinheit verstände.

Wollte man statt der Längen L_1 und L_2 die entsprechenden **Volumen** K_1 und K_2 der Flüssigkeit in den beiden Zuständen der Kompression einführen, indem man $aL_1 = K_1$ und $aL_2 = K_2$,

also $L_1 = \frac{K_1}{a}$ und $L_2 = \frac{K_2}{a}$ setzte; so würde man statt der Gleichungen (191) und (193)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{K_2}{K_1} \quad \ldots . \text{(194)}$$

und

$$p_2 = \frac{c}{K_2} \quad \ldots . \text{(195)}$$

erhalten, worin $c = p_1 K_1$ wäre.

Man findet leicht, daß die vorstehenden beiden Gleichungen für elastische Flüssigkeiten auch dann noch Gültigkeit behalten, wenn ihre Volumen nicht prismatisch, sondern von beliebiger Form sind; denn nimmt man den Querschnitt a des Prismas von der Länge L_1 ungemein klein an, und beachtet, daß in jedem Punkte des Körpers, weil er eine Flüssigkeit und inponderabel ist, derselbe Druck p_1 auf die Flächeneinheit herrscht (vergl. die allgemeinen Prinzipien des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten, auch Gl. (21), indem darin $w = o$ gesetzt wird), so kann man sich denken, dieses Prisma werde der Länge nach in beliebig viele Stücke von ungleicher Länge zerschnitten, und diese Stücke werden parallel zu einander zusammengefügt. Man wird hierdurch im Stande sein, das Volum K_1 des Prismas von der Länge L_1 in jede beliebige Form zu bringen, sodaß die Flüssigkeit stets im Gleichgewichte bleibt und in ihr fortwährend der Druck p_1 auf die Flächeneinheit herrscht. Ebenso kann das Volum K_2 des Prismas von der Länge L_2 unter demselben Drucke p_2 in jede beliebige Form gebracht werden, und man sieht, daß die Gleichungen (194) und (195) ganz allgemein für vollkommen elastische Flüssigkeiten Geltung behalten, wie auch deren räumliche Formen beschaffen sein mögen.

Die Gleichung (194), welche ausdrückt, daß sich die Pressungen einer bestimmten Menge einer elastischen Flüssigkeit auf die Flächeneinheit umgekehrt zu einander verhalten, wie deren Volumen, stellt das bekannte Mariottesche Gesetz dar.

Wenn μ_1 die Dichtigkeit der gegebenen Quantität der Flüssigkeit bei dem Volum K_1 und μ_2 die Dichtigkeit bei dem Vo-

um K_2 wäre; so würde $\mu_1 K_1 = \mu_2 K_2$ oder $\frac{K_2}{K_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, also wegen Gl. (194)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \ldots\ldots (196)$$

sein, woraus folgt, daß sich die Pressungen oder Spannungen der elastischen Flüssigkeiten wie ihre Dichtigkeiten verhalten. Wenn der Werth des Quotienten $\frac{p_1}{\mu_1}$ für irgend eine elastische Flüssigkeit bekannt ist und gleich $\varkappa$ gesetzt wird; so hat man statt Gl. (186)

$$p_2 = \varkappa \mu_2 \quad \ldots\ldots (197)$$

Bezeichnet man das Gewicht Einer Volumeinheit der als schwer gedachten Flüssigkeit beim Drucke p_1 mit w_1 und beim Drucke p_2 mit w_2, so folgt aus Gl. (196), weil man bekanntlich $w_1 = g\mu_1$ und $w_2 = g\mu_2$ hat,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{w_1}{w_2} \quad \ldots\ldots (197^a)$$

oder wenn man den Quotienten $\frac{p_1}{w_1} = k$ setzt,

$$p_2 = k w_2 \quad \ldots\ldots (197^b)$$

Da nach Gl. (197) auch $p_2 = \varkappa \mu_2$, mithin $k w_2 = \varkappa \mu_2$ sein muß, außerdem aber $w_2 = g\mu_2$ ist; so folgt zwischen den beiden Koeffizienten $\varkappa$ und k die Beziehung

$$\varkappa = gk.$$

§. 41. Allgemeine Beziehung zwischen dem Volum einer gegebenen Quantität einer elastischen Flüssigkeit von bestimmter Spannung und der darin herrschenden Temperatur. — Gay-Lussacsches Gesetz.

Wenn eine bestimmte Quantität einer elastischen Flüssigkeit gegeben ist und fortwährend unter demselben Drucke erhalten wird (indem dieselbe z. B. von beweglichen Wänden eingeschlossen ist, gegen welche stets derselbe Druck auf die Flächeneinheit ausgeübt wird); so hat eine Temperaturerhöhung eine Vermeh-

rung und eine Temperaturerniedrigung eine Verminderung des Volums der Flüſſigkeit zur Folge. Nach den Unterſuchungen von Gay-Luſſac iſt dieſe Variation des Volums bei gleichen Temperaturveränderungen eine konſtante Größe, und zwar beträgt dieſelbe für einen jeden Temperaturgrad der hunderttheiligen Skale 0,00375 oder genauer nach Rudbergs, Magnus und Regnaults Verſuchen mit atmoſphäriſcher Luft 0,00366 von demjenigen Volum, welches die Flüſſigkeit unter demſelben Drucke bei der Temperatur 0 einnehmen würde. Es wird hierbei vorausgeſetzt, daß bei der in Rede ſtehenden Temperaturveränderung die Flüſſigkeit keine Änderung in ihrer phyſikaliſchen oder chemiſchen Konſtitution erleide, alſo innerhalb der Gränzen dieſer Temperaturveränderung permanent bleibe.

Bezeichnet daher

K das Volum einer beſtimmten Gasmenge bei der Temperatur 0 und unter einem gewiſſen Drucke,

K_1 das Volum derſelben Gasmenge bei der Temperatur t_1 und unter demſelben Drucke,

K_2 das Volum derſelben Gasmenge bei der Temperatur t_2 und unter demſelben Drucke;

ſo hat man offenbar

$$K_1 = (1 + 0{,}00366\,t_1)K \qquad \ldots\ (198)$$

Ebenſo iſt

$$K_2 = (1 + 0{,}00366\,t_2)K;$$

folglich auch

$$K_2 = K_1 \frac{1 + 0{,}00366\,t_2}{1 + 0{,}00366\,t_1} \qquad \ldots\ (199)$$

§. 42. Beziehung zwiſchen dem Volum, der Dichtigkeit, der Spannung und der Temperatur einer elaſtiſchen Flüſſigkeit.

Wenn in einer gegebenen Quantität einer elaſtiſchen Flüſſigkeit gleichzeitig die Spannung und die Temperatur ſich ändert; ſo ſei

K das Volum der Flüſſigkeit bei der Temperatur o und dem Drucke p, während w das Gewicht der Volumeinheit in dieſem Zuſtande bezeichnet,

K_1 das Volum derſelben bei der Temperatur t_1 und dem Drucke p_1, während w_1 das Gewicht der Volumeinheit in dieſem Zuſtande bezeichnet,

K_2 das Volum derſelben bei der Temperatur t_2 und dem Drucke p_2, während w_2 das Gewicht der Volumeinheit in dieſem Zuſtande bezeichnet.

Wenn die Flüſſigkeit zuvörderſt unter Beibehaltung der Temperatur o vom Drucke p zum Drucke p_1 überginge und hierbei das Volum K' annähme; ſo würde man nach dem Mariotteſchen Geſetze Gl. (194)

$$\frac{K'}{K} = \frac{p}{p_1} \text{ oder } K' = K\frac{p}{p_1}$$

haben. Stiege hierauf die Temperatur von o auf t_1 Grad, ohne daß ſich der Druck p_1 änderte; ſo würde man nach dem Gay-Luſſacſchen Geſetze (Gl. 198)

$$K_1 = K'(1+0{,}00366\,t_1),$$

d. i. wegen des vorhergehenden Werthes von K'

$$K_1 = K\frac{p}{p_1}(1+0{,}00366\,t_1) \quad \ldots\ldots (200)$$

erhalten.

Da ferner ſowol Kw, wie auch $K_1 w_1$ das Gewicht der gegebenen Flüſſigkeitsmenge darſtellt; ſo hat man $K_1 w_1 = Kw$, alſo $w_1 = w\frac{K}{K_1}$, d. i. wegen des Werthes von K_1 aus Gl. (200)

$$w_1 = w\frac{p_1}{p}\frac{1}{1+0{,}00366\,t_1} \quad \ldots\ldots (201)$$

Ebenſo würde man haben

$$K_2 = K\frac{p}{p_2}(1+0{,}00366\,t_2),$$

$$w_2 = w\frac{p_2}{p}\frac{1}{1+0{,}00366\,t_2}.$$

Verbindet man dieſe beiden Gleichungen mit den Gleichungen (200) und (201); ſo findet man

$$K_2 = K_1\frac{p_1}{p_2}\frac{1+0{,}00366\,t_2}{1+0{,}00366\,t_1} \quad \ldots\ldots (202)$$

$$w_2 = w_1 \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{1+0{,}00366\,t_1}{1+0{,}00366\,t_2} \quad \ldots\ldots (203)$$

Nach den letzteren Gleichungen ist auch, wenn man p_2 als die gesuchte Größe ansieht,

$$p_2 = p_1 \frac{K_1}{K_2} \frac{1+0{,}00366\,t_2}{1+0{,}00366\,t_1} \quad \ldots\ldots (203^a)$$

oder

$$p_2 = p_1 \frac{w_2}{w_1} \frac{1+0{,}00366\,t_2}{1+0{,}00366\,t_1} \quad \ldots\ldots (203^b)$$

Wenn nach der letzteren Gleichung das Gewicht w_1 bekannt ist, welches die Volumeinheit der Flüssigkeit unter dem Drucke p_1 und bei der Temperatur t_1 besitzt; so ergibt diese Gleichung den Druck p_2, welchen dieselbe Flüssigkeit ausüben wird, wenn das Gewicht ihrer Volumeinheit w_2 und ihre Temperatur t_2 geworden ist.

Setzt man den Faktor

$$k = \frac{p_1}{w_1} \cdot \frac{1+0{,}00366\,t_2}{1+0{,}00366\,t_1} \quad \ldots\ldots (203^c)$$

so nimmt die Gl. (203^b) die einfache Gestalt

$$p_2 = k w_2 \quad \ldots\ldots (203^d)$$

an, und nach §. 40 würde man auch

$$p_2 = g k \mu_2 \quad \ldots\ldots (203^e)$$

haben, wenn μ_2 die Dichtigkeit der Flüssigkeit vom Drucke p_2 und bei der Temperatur t_2 bezeichnet.

Was den Werth des Koeffizienten k aus den beiden vorstehenden Gleichungen, welcher nach Gl. (203^c) bei derselben Temperatur t_2 konstant bleibt, für verschiedene elastische Flüssigkeiten der Wirklichkeit betrifft; so denke man sich, der Druck p_1, unter welchem das Gewicht der Volumeinheit der elastischen Flüssigkeit bei der Temperatur t_1 den Werth w_1 besaß, sei durch das Gewicht einer unpreßbaren Flüssigkeitssäule von der vertikalen Höhe h_1 gemessen. Beträgt alsdann das Gewicht der Volumeinheit dieser unpreßbaren Flüssigkeit die Größe W, sodaß also $p_1 = h_1 W$ ist; so hat man statt Gl. (203^e)

$$k = h_1 \frac{W}{w_1} \cdot \frac{1 + 0{,}00366\, t_2}{1 + 0{,}00366\, t_1} \quad \ldots\ldots (203^f)$$

Wenn das Gewicht w_1 der Volumeinheit der elastischen Flüssigkeit unter dem Drucke $p_1 = h_1 W$ bei der Temperatur von $t_1 = o$ Grad beobachtet ist; so hat man einfacher

$$p_2 = p_1 \frac{w_2}{w_1} (1 + 0{,}00366\, t_2) \quad \ldots\ldots (203^g)$$

und

$$k = \frac{p_1}{w_1} (1 + 0{,}00366\, t_2) \quad \ldots\ldots (203^h)$$

oder

$$k = h_1 \frac{W}{w_1} (1 + 0{,}00366\, t_2) \quad \ldots\ldots (203^i)$$

Wäre die in Rede stehende Flüssigkeit atmosphärische Luft; so weiß man, wenn der Druck p_1 durch ein Queckssilberbarometer gemessen wird, daß das Verhältniß $\frac{W}{w_1}$ des Gewichtes einer Volumeinheit Queckssilber zu dem Gewichte eines gleichen Volums atmosphärischer Luft vom Drucke $h_1 = 2{,}4215$ Fuß ($= 0{,}76$ Meter) und bei der Temperatur o^0 gleich 10466 ist. Hieraus folgt nach Gl. (203^i) für den Werth des Koefficienten k bei atmosphärischer Luft von der Temperatur t_2

$$k = 25343{,}5\, (1 + 0{,}00366\, t_2) \quad \ldots\ldots (203^k)$$

Bei der Anwendung des vorstehenden Zahlenwerthes auf die Gl. (203^d) oder (203^e) ist vorausgesetzt, daß der rheinl. Fuß die Längeneinheit sei, sodaß sich durch diese Gleichungen der Druck auf den rheinl. Quadratfuß ergeben würde.

Nachdem man den Werth des Koeffizienten k für atmosphärische Luft erfahren hat, ergibt sich der entsprechende Werth für irgend eine andere elastische Flüssigkeit leicht, sobald man das spezifische Gewicht σ dieser letzteren Flüssigkeit in Beziehung zur Luft kennt. Denn betrüge das absolute Gewicht der neuen Flüssigkeit bei demselben Drucke $p_1 = h_1 W$ und bei derselben Temperatur t_1 die Größe w'; so würde man für den dieser Flüssigkeit entsprechenden Koeffizienten k' nach Gl. (203^f)

$$k' = h_1 \frac{W}{w'} \cdot \frac{1+0{,}00366\,t_2}{1+0{,}00366\,t_1}$$

d. i.

$$k' = \frac{w_1}{w'} k,$$

oder weil das spezifische Gewicht der neuen Flüssigkeit $\sigma = \frac{w'}{w_1}$ ist,

$$k' = \frac{k}{\sigma} \qquad \ldots\ldots (203')$$

haben.

Aus der letzteren Beziehung erkennt man, daß sich die Werthe des Koeffizienten k für verschiedene elastische Flüssigkeiten umgekehrt wie deren spezifische Gewichte verhalten.

§. 43. Bestimmung des Druckes in irgend einem Punkte einer schweren elastischen Flüssigkeit.

Auf eine gewisse Quantität einer elastischen Flüssigkeit wirke die Schwere. Es sei

p_1 der bekannte Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit im Punkte A,

p der gesuchte Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit im Punkte C,

OAH eine durch A gelegte Vertikale,

O ein gegebener Punkt in dieser Vertikalen unterhalb A,

CH eine Horizontale,

$AC = s$,

Winkel $CAH = \gamma$,

$OA = z_1$,

$OH = z$,

μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Punkte N,

w das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit in demselben Punkte,

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in der Zeiteinheit mittheilt, so daß $w = \mu g$ ist,

a der sehr kleine Querschnitt einer Röhre, welche man sich in gerader Linie von A bis C gelegt denkt.

Mit Bezugnahme auf die Untersuchung des §s 4 hat man hier für das Volum des Elementes der Flüssigkeitsröhre bei N $\varkappa ds$, für dessen Masse μads und für die Wirkung der Schwere in dieses Element $g\mu ads = wads$. Die Richtung der Schwere, welche sich unter dem Winkel $SNC = \gamma$ gegen NC neigt, ist vertikal von oben nach unten gekehrt, während die Koordinaten des Punktes N von unten nach oben gerechnet sind, sodaß die in die Richtung AC fallende Komponente der Schwerkraft den Druck auf die oberhalb A in der Linie AC liegenden Punkte nicht vermehrt, sondern vermindert. Demnach hat man in dem vorstehenden Ausdrucke $-g$ statt g zu setzen, wodurch derselbe $-g\mu ads = -wads$ wird. Statt der allgemeinen Gleichung (11) erhält man hiernach

$$p = p_1 - \int_o^s \mu g \cos\gamma\, ds = p_1 - \int_o^s w \cos\gamma\, ds, \qquad \ldots\ldots (204)$$

oder wenn man dieselbe differenziirt, indem man alle darin vorkommenden veränderlichen Größen auf den Punkt N bezieht,

$$dp = -w \cos\gamma\, ds.$$

Beachtet man nun, daß nach dem Mariotteschen Gesetze das Gewicht w einer Volumeinheit der Flüssigkeit im Punkte N von dem daselbst stattfindenden Drucke p nach Gl. (197^b) durch die Beziehung

$$p = kw \text{ oder } w = \frac{p}{k} \qquad \ldots\ldots (205)$$

abhängt, worin k ein konstanter Faktor ist; so hat man auch

$$dp = -\frac{p \cos\gamma\, ds}{k}$$

oder

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\cos\gamma\, ds}{k}.$$

Hieraus folgt nach gehöriger Integration zwischen den Gränzen p_1 und p für p und o und s für s

$$\log p - \log p_1 = -\frac{s \cos\gamma}{k}, \text{ d. i.}$$

$$\log\frac{p}{p_1} = -\frac{s\cos\gamma}{k} \text{ oder}$$

$$\frac{p}{p_1} = e^{-\frac{s\cos\gamma}{k}},$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Setzt man nun $s\cos\gamma = z - z_1$; so folgt aus den vorstehenden beiden Gleichungen

$$p = p_1 e^{-\frac{(z-z_1)}{k}} \qquad \ldots\ (206)$$

$$z - z_1 = k\log\frac{p_1}{p} \qquad \ldots\ (207)$$

Aus der Formel (206) ersieht man, daß der Druck p nur von dem vertikalen Niveauunterschiede $z - z_1$ der beiden Punkte A und C abhängig ist, daß derselbe also in allen Punkten einer jeden horizontalen Ebene derselbe ist, oder daß die Flächen von gleichem Niveau auch bei einer schweren elastischen Flüssigkeit Horizontalebenen sind.

In der obigen Gleichung (204) stellt offenbar das Glied $\int_0^s w\cos\gamma\, ds$ das Gewicht einer vertikalen Säule der elastischen Flüssigkeit dar, deren Querschnitt die Flächeneinheit, und deren Höhe $s\cos\gamma = z - z_1 = AH$ ist. Jene Gleichung, oder auch die Gleichung (206), drückt daher aus, daß der Druck p auf die Flächeneinheit in einer elastischen Flüssigkeit und im Punkte C gleich ist dem Drucke in einem tiefer liegenden Punkte A, weniger dem Gewichte einer vertikalen Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, und welche zwischen den durch A und C gelegten Horizontalebenen liegt. Umgekehrt, würde der Druck in dem tiefer liegenden Punkte A gleich dem in C sein, plus dem Gewichte einer vertikalen Flüssigkeitssäule, welche die Flächeneinheit zum Querschnitte hat und zwischen den durch A und C gelegten Horizontalebenen liegt. Dieses Resultat ist dem analog, welches in §. 10 für die unelastischen Flüssigkeiten dargethan ist.

Für das Gewicht W einer vertikalen Flüssigkeitssäule von

der Höhe $z-z_1$, deren Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, und in deren tiefstem Querschnitte der Druck p_1 herrscht, hat man übrigens nach den Gleichungen (204) und (206)

$$W = p_1 - p = p_1\left(1 - e^{-\frac{(z\ \ z_1)}{k}}\right) \quad \ldots\ldots (208)$$

Da bei den meisten gasförmigen Körpern das Gewicht einer Volumeinheit an irgend einer Stelle bedeutend geringer ist, als der an dieser Stelle auf die Flächeneinheit stattfindende Druck, sodaß der Faktor k in Gleichung (205) sehr groß ist; so wird in solchen Flüssigkeiten der Druck p, und mithin auch das Gewicht der Volumeinheit für nicht sehr bedeutende Höhenunterschiede nur unmerklich variiren. Bei der Bestimmung des Gewichtes einer Flüssigkeitsmenge von nicht sehr großen Dimensionen in vertikaler Richtung, wie sie in der Praxis gewöhnlich vorkommen, wird man daher näherungsweise die Flüssigkeit wie eine in allen Punkten gleichförmige ansehen können, deren Gewicht für jede Volumeinheit nach Gl. (205)

$$w = \frac{p}{k}$$

beträgt.

Ebenso wird man bei der Ermittelung des Druckes einer elastischen Flüssigkeit auf eine Oberfläche von mäßigen Dimensionen näherungsweise annehmen können, daß der Druck auf jede Flächeneinheit in normaler Richtung derselbe sei.

Wenn man sich einen starren Körper in eine elastische Flüssigkeit getaucht denkt; so findet man durch ähnliche Betrachtungen, wie in §. 22 ff., daß sich sämmtliche Pressungen der Flüssigkeit auf eine einzige vertikale von unten nach oben wirkende Kraft reduziren, welche dem Gewichte der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich ist. Mit dieser Kraft strebt die Flüssigkeit, den Körper zu heben, oder man kann sagen, daß der eingetauchte Körper das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit an seinem eigenen Gewichte verliere. Auf solche Weise erscheinen alle in der atmosphärischen Luft befindlichen Körper um das Gewicht der von ihnen verdrängten Luftmenge leichter, als sie wirklich sind.

§. 44. Beſtimmung des Druckes in irgend einem Punkte eines Gemiſches von mehreren ſchweren elaſtiſchen Flüſſigkeiten.

Wenn in einem Gefäße mehrere ſchwere elaſtiſche Flüſſigkeiten, Gaſe oder Dämpfe, enthalten ſind und ſich bei überall gleicher Temperatur im Zuſtande des Gleichgewichtes befinden; ſo lehren die Unterſuchungen der Phyſiker, daß ſich die einzelnen Flüſſigkeiten gegenſeitig vollkommen durchdringen oder vermiſchen, als wenn ſie einen einzigen gleichartigen Körper bildeten, und daß in dieſem Zuſtande jede Flüſſigkeit einen Druck ausübt, welcher dem Drucke gleich iſt, den ſie ausüben würde, wenn eine ebenſo große Menge von ihr das Gefäß allein erfüllte, ſodaß der Geſammtdruck in irgend einem Punkte gleich der Summe der einzelnen Preſſungen iſt, welche die Flüſſigkeiten in dieſem Punkte ausüben würden, wenn man jede derſelben in eben den Raum des Gefäßes einſchlöſſe.

Sind alſo für irgend einen Punkt

p', p'', p''' etc. die Theile des daſelbſt herrſchenden Geſammtdruckes p, welche von den einzelnen Flüſſigkeiten herrühren,

w', w'', w''' etc. die Gewichte der Volumeinheit der einzelnen Flüſſigkeiten in dieſem Punkte; ſo hat man

$$p' = k'w', \quad p'' = k''w'', \quad p''' = k'''w''' \text{ etc.},$$

worin k', k'', k''' etc. konſtante Koeffizienten bezeichnen, und es iſt

$$p = p' + p'' + p''' + \text{etc.} \qquad \ldots\ldots (209)$$

Das Gewicht w der Volumeinheit des Gemiſches wird offenbar die Summe $w' + w'' + w''' + \text{etc.}$ ſein; für die Gleichung

$$p = kw$$

wird man alſo hier, weil $p = p' + p'' + \text{etc.} = k'w' + k''w'' + \text{etc.}$ iſt,

$$k'w' + k''w'' + k'''w''' + \text{etc.} = k(w' + w'' + w''' + \text{etc.})$$

haben, woraus

$$k = \frac{k'w' + k''w'' + k'''w''' + \text{etc.}}{w' + w'' + w''' + \text{etc.}} \qquad \ldots\ldots (210)$$

folgt.

Dieser Werth von k ist in die Gleichungen des vorhergehenden §s zu substituiren, wenn man dieselben auf die gegebene Mischung von Gasen anwenden will. Gl. (207) ergibt

$$z - z_1 = \frac{k'w' + k''w'' + k'''w''' + \text{etc.}}{w' + w'' + w''' + \text{etc.}} \log \frac{p_1}{p} \quad \ldots\ldots (211)$$

Gleichgewicht einer atmosphärischen Luftsäule. — Barometermessungen.

§. 45. Allgemeine Gleichung für den in einem Punkte der atmosphärischen Luft stattfindenden Druck.

Im Vorstehenden ist angenommen, daß auf alle Massentheilchen der gegebenen elastischen Flüssigkeit die Schwere mit gleicher Intensität und nach einer unveränderlichen Richtung wirke, und daß außerdem in allen Punkten dieselbe Temperatur herrsche.

Bei einer Flüssigkeitsmenge von sehr bedeutenden Dimensionen, wie bei der Atmosphäre unserer Erde, finden sich diese Bedingungen übrigens nicht mehr erfüllt, und es muß bei den Untersuchungen der in bedeutenden vertikalen Abständen herrschenden Pressungen sowol auf die Variation Rücksicht genommen werden, welcher die Intensität der Schwere bei verändertem Abstande von der Oberfläche der Erde unterliegt, wie auch auf die Temperaturunterschiede, welche zwischen den zu betrachtenden Punkten stattfinden. Was die Richtung der Schwere in einer so großen Flüssigkeitsmenge betrifft; so ist dieselbe zwar für alle Massentheilchen nicht parallel, übrigens ist sie überall normal gegen die Oberfläche der auf der Erde befindlichen Meere gerichtet. Die Oberfläche dieser Meere bildet selbst eine Fläche von gleichem Niveau sowol für das unpreßbare Wasser, wie für die elastische Luft, und man sieht leicht, daß die obigen Formeln, wenn man von der Veränderlichkeit der Intensität der Schwere und von dem Einflusse des Temperaturwechsels abstrahirt, auch für die verschiedenen Punkte der Erdatmosphäre Gültigkeit behalten würden, sobald man nur die Höhen z überall normal von dem Spiegel der zusammenhängenden Meere aus mißt.

Um die Formeln zu entwickeln, in welchen die bei der großen Ausdehnung der Atmosphäre wichtigen Variationen der Schwere und der Temperatur gehörig berücksichtigt sind; so hat man nach §. 43 für die Differenzialgleichung zwischen dem in irgend einem Punkte stattfindenden Drucke p, dem Gewichte w der Volumeinheit der Flüssigkeit in diesem Punkte und der Höhe z über dem Meeresspiegel (da $\cos\gamma\, ds = dz$ ist)

$$dp = -w\,dz \qquad \ldots\ldots (212)$$

Diese Gleichung ist mit Berücksichtigung der Veränderungen der Schwere, der Temperatur und der Zusammensetzung der atmosphärischen Luft zu integriren.

§. 46. Veränderlichkeit der Schwere.

Die Schwere ändert sich mit der geographischen Breite des zu betrachtenden Punktes und mit der Höhe desselben über dem Meeresspiegel. Es sei

R der mittlere Halbmesser der Erde $= 20283974$ Fuß rheinl. (wenn die Länge des mittleren Erdquadranten zu 10000000 Meter angenommen wird),

β die geographische Breite des Ortes, vom Äquator aus gerechnet,

z die Höhe des Ortes über dem Meeresspiegel,

g_1 die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern bei einer Breite von 45° in der Höhe des Meeresspiegels in der Sekunde mittheilt, und welche $= 31{,}2425$ Fuß ist,

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere bei der Breite β den Körpern mittheilt, welche sich in der Höhe z über dem Meere befinden.

Nach §. 39, Gl. 185 ist die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern bei einer Breite β in der Höhe des Meeresspiegels mittheilt, gleich

$$g_1(1 - 0{,}0027\cos 2\beta).$$

Außerdem ist bekannt, daß sich die Wirkung der Schwere auf einen Körper, welcher sich außerhalb des Erdballes befindet, im umgekehrten Verhältnisse, wie das Quadrat des Abstandes dieses Körpers vom Mittelpunkte der Erde ändert. Demnach ist

Dieser Werth von k ist in die Gleichungen des vorhergehenden §s zu substituiren, wenn man dieselben auf die gegebene Mischung von Gasen anwenden will. Gl. (207) ergibt

$$z - z_1 = \frac{k'w' + k''w'' + k'''w''' + \text{etc.}}{w' + w'' + w''' + \text{etc.}} \log \frac{p_1}{p} \quad \ldots\ldots (211)$$

Gleichgewicht einer atmosphärischen Luftsäule. — Barometermessungen.

§. 45. Allgemeine Gleichung für den in einem Punkte der atmosphärischen Luft stattfindenden Druck.

Im Vorstehenden ist angenommen, daß auf alle Massentheilchen der gegebenen elastischen Flüssigkeit die Schwere mit gleicher Intensität und nach einer unveränderlichen Richtung wirke, und daß außerdem in allen Punkten dieselbe Temperatur herrsche.

Bei einer Flüssigkeitsmenge von sehr bedeutenden Dimensionen, wie bei der Atmosphäre unserer Erde, finden sich diese Bedingungen übrigens nicht mehr erfüllt, und es muß bei den Untersuchungen der in bedeutenden vertikalen Abständen herrschenden Pressungen sowol auf die Variation Rücksicht genommen werden, welcher die Intensität der Schwere bei verändertem Abstande von der Oberfläche der Erde unterliegt, wie auch auf die Temperaturunterschiede, welche zwischen den zu betrachtenden Punkten stattfinden. Was die Richtung der Schwere in einer so großen Flüssigkeitsmenge betrifft; so ist dieselbe zwar für alle Massentheilchen nicht parallel, übrigens ist sie überall normal gegen die Oberfläche der auf der Erde befindlichen Meere gerichtet. Die Oberfläche dieser Meere bildet selbst eine Fläche von gleichem Niveau sowol für das unpreßbare Wasser, wie für die elastische Luft, und man sieht leicht, daß die obigen Formeln, wenn man von der Veränderlichkeit der Intensität der Schwere und von dem Einflusse des Temperaturwechsels abstrahirt, auch für die verschiedenen Punkte der Erdatmosphäre Gültigkeit behalten würden, sobald man nur die Höhen z überall normal von dem Spiegel der zusammenhängenden Meere aus mißt.

Um die Formeln zu entwickeln, in welchen die bei der großen Ausdehnung der Atmosphäre wichtigen Variationen der Schwere und der Temperatur gehörig berücksichtigt sind; so hat man nach §. 43 für die Differenzialgleichung zwischen dem in irgend einem Punkte stattfindenden Drucke p, dem Gewichte w der Volumeinheit der Flüssigkeit in diesem Punkte und der Höhe z über dem Meeresspiegel (da $\cos\gamma\, ds = dz$ ist)

$$dp = -w\,dz \qquad \ldots\ldots (212)$$

Diese Gleichung ist mit Berücksichtigung der Veränderungen der Schwere, der Temperatur und der Zusammensetzung der atmosphärischen Luft zu integriren.

§. 46. Veränderlichkeit der Schwere.

Die Schwere ändert sich mit der geographischen Breite des zu betrachtenden Punktes und mit der Höhe desselben über dem Meeresspiegel. Es sei

R der mittlere Halbmesser der Erde = 20283974 Fuß rheinl. (wenn die Länge des mittleren Erdquadranten zu 10000000 Meter angenommen wird),

β die geographische Breite des Ortes, vom Äquator aus gerechnet,

z die Höhe des Ortes über dem Meeresspiegel,

g_1 die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern bei einer Breite von 45° in der Höhe des Meeresspiegels in der Sekunde mittheilt, und welche = 31,2425 Fuß ist,

g die Geschwindigkeit, welche die Schwere bei der Breite β den Körpern mittheilt, welche sich in der Höhe z über dem Meere befinden.

Nach §. 39, Gl. 185 ist die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern bei einer Breite β in der Höhe des Meeresspiegels mittheilt, gleich

$$g_1(1 - 0{,}0027\cos 2\beta).$$

Außerdem ist bekannt, daß sich die Wirkung der Schwere auf einen Körper, welcher sich außerhalb des Erdballes befindet, im umgekehrten Verhältnisse, wie das Quadrat des Abstandes dieses Körpers vom Mittelpunkte der Erde ändert. Demnach ist

in der Höhe des Meeresspiegels betrachtet. Befände man sich aber unter der Breite β und in einer Höhe z über dem Meeresspiegel; so hat man für das Gewicht des Kubikfußes der atmosphärischen Flüssigkeit bei dem Drucke p und der Temperatur t nach Gl. (214) und (216) den Werth

$$w\frac{p-0{,}376q}{2{,}4215\,W}\cdot\frac{1}{1+0{,}00366t}\cdot\left(\frac{R}{R+z}\right)^2(1-0{,}0027\cos 2\beta)\quad\ldots.(217)$$

Substituirt man endlich diesen Werth statt w in die allgemeine Gleichung (212); so erhält man, indem man auf beiden Seiten durch p dividirt,

$$\frac{dp}{p}=-\frac{w}{2{,}4215\,W}(1-0{,}0027\cos 2\beta)\frac{1-0{,}376\frac{q}{p}}{1+0{,}00366t}\cdot\frac{R^2dz}{(R+z)^2}\quad\ldots.(218)$$

Diese Gleichung ließe sich unmittelbar integriren, wenn die Veränderlichen $\frac{q}{p}$ und t als Funktionen von z gegeben wären. Da aber die Art und Weise, wie das Verhältniß des Wasserdampfes und die Temperatur mit der Höhe z sich ändern, nicht hinlänglich bekannt ist, und da die Beziehungen dieser Größen untereinander auch mit dem Orte und anderen Vorgängen in der Atmosphäre sich ändern; so muß man sich begnügen, hierfür mittlere Werthe anzunehmen.

Betrachtet man zuvörderst den Faktor $1-0{,}376\,\frac{q}{p}$; so leuchtet ein, daß wenn die Luft immer mit Wasserdampf gesättigt angesehen werden könnte, man nach dem bekannten Gesetze der Spannkraft des Wasserdampfes in dem Zwischenraume von 0 bis 30°, wo die barometrischen Beobachtungen gewöhnlich angestellt werden, die Größe q als gleichmäßig mit t wachsend annehmen und

$$q=(0{,}01631+0{,}002756\,t)\,W\qquad\ldots.(219)$$

setzen kann. Bei der Ungewißheit, in der man sich hierbei befindet, nimmt man gewöhnlich die Hälfte des Werthes, welcher dem Sättigungspunkte entspricht, und schreibt

$$q=(0{,}00816+0{,}001378\,t)\,W\qquad\ldots.(220)$$

Luft als aus reiner Luft bestehend angesehen werden könnte. Dieselbe ist jedoch fast immer mit Wasserdampf gemischt, welcher einen verschiedenen Grad von Elastizität besitzt und deshalb noch besonders berücksichtigt werden muß.

Man weiß, daß bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke das spezifische Gewicht des Wasserdampfes 0,624 von dem der Luft beträgt. Betrachten wir also ein Gemisch von Luft und Wasserdampf; so sei

p der von der Mischung ausgeübte Druck in Pfunden auf den Quadratfuß,

q der Theil dieses Druckes, welchen der Wasserdampf ausübt, also (nach §. 44)

$p-q$ der Theil dieses Druckes, welchen die reine Luft ausübt, und

t die Temperatur des Gemisches.

Alsdann wird man für das Gewicht eines Kubikfußes Wasserdampf

$$0{,}624\,w\,\frac{q}{2{,}4215\,\mathrm{W}}\cdot\frac{1}{1+0{,}00366\,t}$$

und für das Gewicht eines Kubikfußes reiner Luft

$$w\,\frac{p-q}{2{,}4215\,\mathrm{W}}\cdot\frac{1}{1+0{,}00366\,t},$$

also für das Gewicht eines Kubikfußes des Gemisches

$$w\,\frac{p-0{,}376\,q}{2{,}4215\,\mathrm{W}}\cdot\frac{1}{1+0{,}00366\,t} \qquad \ldots\ldots (216)$$

haben.

Wäre dieses Gemisch mit Wasserdampf gesättigt; so würde q der Druck für die Temperatur t in der Tabelle sein, welche die von dem Wasserdampfe bei dem Maximum seiner Dichtigkeit unter verschiedenen Temperaturen erlangte Spannkraft angibt.

§. 48. Gleichung für den in einem Punkte der atmosphärischen Luft herrschenden Druck.

Die Formel (216) drückt das Gewicht eines Kubikfußes der atmosphärischen Flüssigkeit aus, wenn man dieselbe als ein Gemisch von Luft und Wasserdampf unter der Breite von 45° und

in der Höhe des Meeresspiegels betrachtet. Befände man sich aber unter der Breite β und in einer Höhe z über dem Meeresspiegel; so hat man für das Gewicht des Kubikfußes der atmosphärischen Flüssigkeit bei dem Drucke p und der Temperatur t nach Gl. (214) und (216) den Werth

$$w\frac{p-0{,}376q}{2{,}4215\,W}\cdot\frac{1}{1+0{,}00366t}\cdot\left(\frac{R}{R+z}\right)^2(1-0{,}0027\cos 2\beta)\quad\ldots.(217)$$

Substituirt man endlich diesen Werth statt w in die allgemeine Gleichung (212); so erhält man, indem man auf beiden Seiten durch p dividirt,

$$\frac{dp}{p}=-\frac{w}{2{,}4215\,W}(1-0{,}0027\cos 2\beta)\frac{1-0{,}376\frac{q}{p}}{1+0{,}00366t}\cdot\frac{R^2dz}{(R+z)^2}\quad\ldots.(218)$$

Diese Gleichung ließe sich unmittelbar integriren, wenn die Veränderlichen $\frac{q}{p}$ und t als Funktionen von z gegeben wären. Da aber die Art und Weise, wie das Verhältniß des Wasserdampfes und die Temperatur mit der Höhe z sich ändern, nicht hinlänglich bekannt ist, und da die Beziehungen dieser Größen untereinander auch mit dem Orte und anderen Vorgängen in der Atmosphäre sich ändern; so muß man sich begnügen, hierfür mittlere Werthe anzunehmen.

Betrachtet man zuvörderst den Faktor $1-0{,}376\,\frac{q}{p}$; so leuchtet ein, daß wenn die Luft immer mit Wasserdampf gesättigt angesehen werden könnte, man nach dem bekannten Gesetze der Spannkraft des Wasserdampfes in dem Zwischenraume von 0 bis 30°, wo die barometrischen Beobachtungen gewöhnlich angestellt werden, die Größe q als gleichmäßig mit t wachsend annehmen und

$$q=(0{,}01631+0{,}002756\,t)\,W\qquad\ldots.(219)$$

setzen kann. Bei der Ungewißheit, in der man sich hierbei befindet, nimmt man gewöhnlich die Hälfte des Werthes, welcher dem Sättigungspunkte entspricht, und schreibt

$$q=(0{,}00816+0{,}001378\,t)\,W\qquad\ldots.(220)$$

Nimmt man nun für p den mittleren Werth 2,4215 W an; so hat man für den Faktor $1-0{,}376\,\frac{q}{p}$ die Größe

$$1-0{,}376\,\frac{0{,}00816+0{,}001378\,t}{2{,}4215}=1-0{,}001267-0{,}000214\,t$$

zu substituiren.

Der Bruch

$$\frac{1{,}0{,}001267-0{,}000214\,t}{1+0{,}00366\,t}$$

ist aber, wenn man eine sehr kleine Größe vernachlässigt, nur wenig von

$$\frac{1-0{,}001267}{1+0{,}004\,t}$$

verschieden.

Hiernach kann die Gleichung (218) durch die folgende ersetzt werden

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\omega(1-0{,}001267)}{2{,}4215\,\mathrm{W}}\,(1-0{,}0027\cos 2\beta)\,\frac{1}{1+0{,}004\,t}\cdot\frac{\mathrm{R}^2\,dz}{(\mathrm{R}+z)^2} \quad \ldots\ldots (221)$$

Bei der Integration dieser Gleichung betrachten wir die Temperatur t als konstant und nehmen für den Werth dieser Größe das Mittel zwischen den Temperaturent t_1 und t, welche in den beiden Punkten, deren Höhenunterschied man wissen will, beobachtet sind. Bezeichnet man ferner mit z_1 und z die Höhen dieser beiden Punkte über dem Meeresspiegel und mit p_1 und p die in diesen Punkten stattfindenden Pressungen; so hat man, wenn man den Koeffizienten von $\frac{\mathrm{R}^2\,dz}{(\mathrm{R}+z)^2}$ vorläufig mit A bezeichnet, nach gehöriger Integration resp. zwischen den Gränzen p_1 und p für p und den Gränzen z_1 und z für z

$$\log p_1-\log p=\mathrm{A}\left(-\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}+z_1}+\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}+z}\right)$$

d. i.

$$\log\frac{p_1}{p}=-\mathrm{A}\,\frac{\mathrm{R}^2(z-z_1)}{\mathrm{R}^2+\mathrm{R}(z+z_1)+zz_1}=-\mathrm{A}\,\frac{z-z_1}{1+\frac{z+z_1}{\mathrm{R}}+\frac{zz_1}{\mathrm{R}^2}}$$

oder wenn man das durch R^2 dividirte Glied wegläßt und für A wieder seinen Werth substituirt,

$$\log\frac{p_1}{p} = \frac{w(1-0{,}001267)}{2{,}4215\,W}(1-0{,}0027\cos 2\beta)\frac{1}{1+0{,}002(t_1+t)}\cdot\frac{z-z_1}{1+\frac{z+z_1}{R}} \quad \ldots\ldots (222)$$

Der Logarithmus auf der linken Seite ist ein natürlicher, und man muß denselben durch $M=2{,}302585$ dividiren, wenn man ihn aus den gewöhnlichen (briggischen) Tafeln nehmen will, sodaß man hat

$$\log\text{vulg}\frac{p_1}{p} = \frac{w(1-0{,}001267)}{2{,}4215.M.W}(1-0{,}0027\cos 2\beta)\frac{1}{1+0{,}002(t_1+t)}\cdot\frac{z-z_1}{1+\frac{z+z_1}{R}} \quad \ldots\ldots (223)$$

§. 49. Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Örter mit Hülfe des Barometers.

Aus der letzteren Gleichung (223) kann der Werth der Höhendifferenz $z-z_1$ als Funktion des Verhältnisses $\frac{p_1}{p}$ der Pressungen, welche in den beiden beobachteten Punkten stattfinden, abgeleitet werden. Es kommt nur noch darauf an, dieses Verhältniß aus der Beobachtung des Barometers zu bestimmen.

Verfolgen wir hierbei den von Navier eingeschlagenen Gang; so seien h_1 und h die in beiden Punkten beobachteten Barometerhöhen, u_1 und u die Temperaturen der Quecksilbersäule, welche gewöhnlich von den oben mit t_1 und t bezeichneten Temperaturen der Luft abweichen.

Da sich das Quecksilber in dem Zwischenraume von 0 bis 100° um $\frac{1}{55{,}50}$, also bei einer Temperaturerhöhung von 1° um $\frac{1}{5550}$ und bei einer Temperaturerhöhung von $u°$ um $\frac{u}{5550}$ ausdehnt; so ist das Gewicht eines Kubikfußes Quecksilber unter der Breite von 45° in der Höhe des Meeresspiegels und

bei der Temperatur u gleich $\frac{W}{1+\frac{u}{5550}}$ oder ziemlich genau $W\left(1-\frac{u}{5550}\right)$. Dieſes Gewicht wird unter der Breite β und in dem Abſtande $R+z$ vom Mittelpunkte der Erde $W(1-0{,}0027\cos 2\beta)\left(1-\frac{u}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z)^2}$ ſein.

Hiernach hat man

$$p=hW(1-0{,}0027\cos 2\beta)\left(1-\frac{u}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z)^2},$$

$$p_1=h_1W(1-0{,}0027\cos 2\beta)\left(1-\frac{u_1}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z_1)^2};$$

mithin

$$\frac{p_1}{p}=\frac{h_1}{h}\,\frac{1-\frac{u_1}{5550}}{1-\frac{u}{5550}}\left(\frac{R+z}{R+z_1}\right)^2$$

oder wenn man mit Vernachläſſigung ſehr kleiner Größen des zweiten Grades

$$\frac{1-\frac{u_1}{5550}}{1-\frac{u}{5550}}=1+\frac{u-u_1}{5550}\text{ und}$$

$$\frac{R+z}{R+z_1}=\left(1+\frac{z-z_1}{R}\right)^2$$

ſetzt,

$$\frac{p_1}{p}=\frac{h_1}{h}\left(1+\frac{u-u_1}{5550}\right)\left(1+\frac{z-z_1}{R}\right)^2, \qquad \ldots\ldots (224)$$

alſo

$$\log\frac{p_1}{p}=\log\frac{h_1}{h}+\log\left(1+\frac{u-u_1}{5550}\right)+2\log\left(1+\frac{z-z_1}{R}\right).$$

Aus der bekannten Formel $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-$ etc. für $\log(1+x)$ geht hervor, daß wenn x eine ſehr kleine Zahl iſt, der natürliche Logarithmus von $1+x$ ſehr nahe gleich x, und mithin der gemeine Logarithmus gleich $0{,}434295.x$ iſt. Da nun $\frac{u-u_1}{5550}$ und $\frac{z-z_1}{R}$ meiſtens ſehr kleine Zahlen ſind; ſo kann man ziemlich genau ſetzen

$$\log \text{vulg} \frac{p_1}{p} = \log \text{vulg} \frac{h_1}{h} + 0{,}434295\left(\frac{u-u_1}{5550} + 2\frac{z-z_1}{R}\right) \ldots (225)$$

Substituirt man diesen Werth für $\log \text{vulg} \frac{p_1}{p}$ in Gleichung (223), entwickelt den Werth von $z-z_1$ und setzt bei Vernachlässigung einer sehr kleinen Größe des zweiten Grades $\frac{1}{1-0{,}0027\cos 2\beta} = 1+0{,}0027\cos 2\beta$; so kommt

$$z-z_1 = \frac{2{,}4215 . M . W}{(1-0{,}001267)\,w}(1+0{,}0027\cos 2\beta)[1+0{,}002(t+t_1)]\times$$

$$\left(1+\frac{z+z_1}{R}\right)\left[\log \text{vulg} \frac{h_1}{h} + 0{,}434295\left(\frac{u-u_1}{5550} + 2\frac{z-z_1}{R}\right)\right] \ldots (226)$$

Der Faktor $\frac{2{,}4215 . M . W}{(1-0{,}001267)\,w}$, worin M die Zahl 2,302585 bezeichnet, ist ein konstanter Koeffizient, dessen Werth man nach dem bekannten Verhältnisse der Gewichte W und w des Quecksilbers und der atmosphärischen Luft unter der Breite von 45°, bei der Temperatur von 0° und unter dem Drucke von 2,4215 Fuß rheinl. oder 0,76 Meter bestimmen kann. Nach den Versuchen von Biot und Arago hat man $\frac{W}{w} = 10466{,}8$, was für den Werth jenes Koeffizienten

$$\frac{2{,}4215 . M . W}{(1-0{,}001267)\,w} = 58434{,}2 \text{ Fuß} \quad \ldots\ldots (227)$$

ergibt.

Der Werth dieses Koeffizienten könnte auch bestimmt werden, indem man die vorstehende Formel auf barometrische Beobachtungen anwendete, welche an Orten gemacht wären, deren Höhenunterschied man durch ein anderes Verfahren schon kennen gelernt hätte, und wirklich hatten auch vor der genauen Ermittelung des Verhältnisses der spezifischen Gewichte der Luft und des Quecksilbers die von Ramond in den Pyrenäen angestellten Beobachtungen für den Werth des fraglichen Koeffizienten die Zahl 58422 Fuß ergeben, welche von der vorhergehenden nur wenig verschieden ist. Man kann also einfach setzen

$$z-z_1 =$$

$$58422\,(1+0{,}0027\cos 2\beta)\,[1+0{,}002\,(t+t_1)]\left(1+\frac{z+z_1}{\mathrm{R}}\right)\times$$

$$\left[\log \text{vulg}\,\frac{h_1}{h}+0{,}43429\left(\frac{u-u_1}{5550}+2\frac{z-z_1}{\mathrm{R}}\right)\right] \quad \ldots\ldots (228)$$

Der Koeffizient 58422 Fuß iſt übrigens von einem anderen Koeffizienten 58604 Fuß abgeleitet, welcher durch die Beobachtungen von Ramond unmittelbar beſtimmt iſt, indem dabei zugleich auf die Abnahme der Schwere in vertikaler Richtung Rückſicht genommen und das in höher gelegenen Orten erhaltene Reſultat auf das Niveau des Meeres zurückgeführt iſt. Die Subſtitution der Zahl 58604 für die Zahl 58422 würde alſo bei dieſen Beobachtungen näherungsweiſe die ſehr kleinen Glieder erſetzen, welche R zum Nenner haben, und welche durch die Betrachtung der Abnahme der Schwere in vertikaler Richtung eingeführt ſind.

Man kann ſich alſo mit Vortheil der einfacheren Formel

$$z-z_1 = 58604\,(1+0{,}0027\cos 2\beta)\,[1+0{,}002\,(t+t_1)]\times$$

$$\left[\log \text{vulg}\,\frac{h_1}{h}+0{,}00007825\,(u-u_1)\right] \quad \ldots\ldots (229)$$

bedienen, welche den Höhenunterſchied $z-z_1$ in rheinländiſchen Fußen angibt.

Man könnte ſelbſt den Faktor, welcher die Breite β enthält, auf die Einheit reduziren; es iſt aber beſſer, ſich der nachſtehenden Tabelle zu bedienen, welche die gemeinen Logarithmen der Produkte von 58604 in die den verſchiedenen Breiten entſprechenden Werthe dieſes Faktors enthält. Die ſehr ausgedehnten Tabellen, welche man aufgeſtellt hat, um dadurch die Berechnung der Barometerbeobachtungen nach der vorſtehenden Formel zu erleichtern, werden hierdurch überflüſſig, und es ſcheint nicht, daß dieſe Tabellen einen größeren Vortheil darbieten, als die unmittelbare Anwendung der vorſtehenden Gleichung (229), indem man ſich dabei der gewöhnlichen logarithmiſchen Tabellen bedient.

Es leuchtet ein, daß man in den letzteren Formeln (228) und (229) die Barometerhöhen h_1 und h nach jedem beliebigen Maaße, alſo auch nach Zollen meſſen kann, da dieſelben nur in dem Quotienten $\frac{h_1}{h}$ erſcheinen.

Breite, vom Äquator aus gerechnet $=\beta$	Gemeine Logarithmen der Zahlen $58604(1+0{,}0027\cos 2\beta)$
Sexagesimalgrade	
0	4,7690983
5	0806
10	0277
15	4,7689415
20	8245
25	6802
30	5132
35	3280
40	1308
45	4,7679273
50	7235
55	5260
60	3406
65	1729
70	0281

§. 50. Beispiele.

Um eine Anwendung der obigen Formel (229) zu zeigen; so sei

Breite $\beta=1^0 45'$. Obere Station $t=-1{,}6^0$	$h=76{,}713'''$	$u=10{,}0^0$
Untere Station $t_1=25{,}3^0$	$h_1=154{,}981'''$	$u_1=25{,}3^0$
$t+t_1=23{,}7$		$u-u_1=-15{,}3^0$
$2(t+t_1)=47{,}4$		
$1+0{,}002(t+t_1)=1{,}0474$		
Logarithmus des Koeffizienten für 0^0 Breite . . .		4,7690983
log 1,0474		0,0201126
log 154,981 2,1902790		
— log 76,713 . . . — 1,8848723		
$\log \frac{h^1}{h}$ 0,3054067		
$0{,}00007825 \times (-15{,}3)$ — 0,0011972		
0,3042095 Hiervon ist der log		0,4831728—1
Logarithmus der gesuchten Höhe (18723,3') . . .		4,2723837

Dieſes Beiſpiel ſtellt die Berechnung der Höhe des Chimboraço nach den Beobachtungen von Humboldt dar, und iſt Einer von den Fällen, wo die vernachläſſigten Glieder am bedeutendſten ausfallen könnten. Unter Beibehaltung dieſer Glieder findet Ramond 18728,7′ ſtatt 18723,3′, ein Unterſchied, welcher bei der Größe der berechneten Höhe ſehr unbedeutend iſt.

Es folgt noch die Berechnung der Höhe des Guanaruato, welche im Annuaire du bureau des longitudes als Beiſpiel aufgeführt iſt.

Breite $\beta=21^0$. Obere Station $t=21{,}3^0$	$h=275{,}72'''$	$u=21{,}3^0$
Untere Station $t_1=25{,}3^0$	$h_1=350{,}13'''$	$u_1=25{,}3^0$
$t+t_1=46{,}6$		$u-u_1=-4^0$
$2(t+t_1)=93{,}2$		
$1+0{,}002(t+t_1)=1{,}0932$		
Logarithmus des Koeffizienten für 20^0 Breite . . .		4,7688245
log 1,0932		0,0386996
log 350,13 2,5442293		
— log 275,72 . . — 2,4404683		
log $\frac{h_1}{h}$ 0,1037610		
$0{,}00007825\times(-4)=$ −0,0003130		
0,1034480 Hiervon iſt der log		0,0147221 − 1
Logarithmus der geſuchten Höhe (6641,2′)		3,8222462

§. 57. Korrektionen bei Ableſung der Barometerſtände h_1 und h wegen der Ausdehnbarkeit der Skale und der Depreſſion der Queckſilberſäule.

Die Buchſtaben h_1 und h in vorſtehenden Formeln ſtellen die auf dem Inſtrumente abgeleſenen Höhen der Queckſilberſäule dar, welche im unteren und oberen Standpunkte dem athmoſphäriſchen Drucke das Gleichgewicht hält. Die Angabe dieſer Höhen wird aber durch die Ausdehnung der Körper geändert, auf welche der Maaßſtab gravirt iſt.

Es sei δ die lineare Ausdehnung dieser Körper für einen Grad des hunderttheiligen Thermometers, sodaß die Länge 1 bei der Temperatur 0 zur Länge $1+\delta u$ bei der Temperatur u wird. Die Höhen h_1 und h, welche resp. bei den Temperaturen u_1 und u beobachtet sind, würden also $h_1(1+\delta u_1)$ und $h(1+\delta u)$ sein, wenn man sie bei der Temperatur 0 beobachtete.

Um daher auf diese Abweichung Rücksicht zu nehmen, hat man in der Formel (228) oder (229) $\frac{h_1(1+\delta u_1)}{h(1+\delta u)}$ oder ziemlich genau $\frac{h_1}{h}[1-\delta(u-u_1)]$ an die Stelle von $\frac{h_1}{h}$ zu setzen. Da nun $\log\frac{h_1}{h}[1-\delta(u-u_1)]=\log\frac{h_1}{h}+\log[1-\delta(u-u_1)]$ ist, und weil $\delta(u-u_1)$ eine sehr kleine Zahl ist, ziemlich genau $\log\text{nat.}[1-\delta(u-u_1)]=-\delta(u-u_1)$ und $\log\text{vulg}[1-\delta(u-u_1)]=-0{,}434295.\delta.(u-u_1)$ ist; so sieht man, daß der Koeffizient von $u-u_1$ in den Formeln (229) und (230) um das Produkt der Zahl δ in die Zahl 0,434295 vermindert werden muß, sodaß dieser Koeffizient

$$0{,}00007825-0{,}434295.\delta$$

wird.

Wendet man hierbei bekannte Erfahrungen an; so findet man für den fraglichen Koeffizienten von $u-u_1$,

wenn die Ausdehnung des Maaßstabes als null angenommen wird 0,00007825,
bei einem Maaßstabe auf Glas und auf Holz . . 0,00007445,
» » » » Kupfer . . . . . 0,00007009.

Eine zweite Rektifikation bei der Bestimmung der wahren Barometerstände h_1 und h wird durch die Kapillardepression der Quecksilbersäule nothwendig gemacht.

Durchmesser der Röhre.	Depression.
Linien	Linien
0,918	2,092
1,376	1,331
1,825	0,935
2,294	0,691
2,753	0,527
3,212	0,404
3,670	0,314
4,129	0,245
4,588	0,193
5,047	0,161
5,506	0,119
5,964	0,094
6,423	0,073
6,882	0,057
7,341	0,045
7,800	0,034
8,258	0,027
8,717	0,020
9,176	0,016

Man weiß, daß die Quecksilbersäule in den Barometerröhren in Folge der Kapillarität kürzer ist, als sie nach hydrostatischen Gesetzen sein müßte. Die Größe dieser Depression hängt von dem Durchmesser der Röhre ab und man findet ihren Werth in nebenstehender Tabelle. Gewöhnlich vernachlässigt man es, hierauf Rücksicht zu nehmen, weil dieselbe bei beiden Instrumente in gleichem Maaße stattfindet, wenn ihre Röhren denselben Durchmesser haben: da das Resultat aber nicht von der Differenz der Barometerhöhen, sondern von dem Verhältnisse dieser Höhen zueinander abhängt; so ist es zweckmäßig, darauf Bedacht zu nehmen, besonders wenn der Höhenunterschied nicht sehr beträchtlich ist.

§. 52. Praktische Regeln für das bei den barometrischen Höhenmessungen zu beobachtende Verfahren.

Die barometrischen Beobachtungen und der Gebrauch der obigen Formel (229) zur Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Punkte über der Oberfläche der Erde erfordern eine große Umsicht. Jene Formel ist auf die Voraussetzung eines Zustandes des Gleichgewichtes und auf eine thermometrische und hygrometrische Beschaffenheit der Luft gegründet, welche selten in der Atmosphäre stattfinden. Durch die Erfahrung hat man die den Beobachtungen günstigen und ungünstigen Umstände kennen gelernt, und Ramond hat hierüber folgende Regeln aufgestellt:

1) Man kann hoffen, genaue Höhen zu erlangen, wenn man unter Mittag, bei ruhigem Wetter, welches sich nicht sehr der Veränderung zuneigt, beobachtet, indem sich die beiden Barometer auf isolirten Spitzen befinden, oder indem das untere Barometer in mäßigem horizontalen Abstande von dem oberen in einer freien

Ebene aufgestellt ist. In diesem letzteren Falle ist es sogar besser, den Abstand größer anzunehmen, als das Barometer am Fuße der Berge anzubringen, wo der Vortheil der Nähe durch die schädliche Einwirkung der herabsteigenden Winde überwogen wird. In Ermangelung dieser sehr günstigen Umstände haben die Fehler keine festen Gränzen; sie können nur nach Gutdünken und nach dem Grade des Einflusses berichtigt werden, welchen die Erfahrung des Beobachters den Ursachen, welche sie hervorbringen, zuschreibt.

2) Man bestimmt die Höhen im Allgemeinen zu schwach,
wenn die Beobachtung am Morgen oder am Abend gemacht wird;
wenn sich das untere Barometer in einer Ebene und das obere in einem engen und tiefen Thale befindet;
bei starkem Südwinde;
bei stürmischem Wetter.

3) Man bestimmt dagegen die Höhen zu groß,
wenn man zwischen Mittag und zwei bis drei Uhr nachmittags beobachtet, besonders im Sommer und wenn die Sonne nicht von Wolken umhüllt ist;
wenn sich das obere Barometer auf einer Bergspitze und das untere in einer engen Schlucht befindet;
bei starkem Nordwinde, besonders wenn man sich auf einem Berge befindet und der Wind gegen den steilsten Abhang stößt.

4) Endlich kann man versichert sein, daß die Fehler nach allen Seiten groß und veränderlich sein werden, wenn die Höhenunterschiede unbeträchtlich sind, und wenn sich die beiden Barometer in derselben Ebene oder in demselben Thale, und noch mehr, wenn sie sich in zwei durch eine Bergkette getrennten Thälern befinden. In solchen Fällen kann der horizontale Abstand nicht klein genug sein, und ungeachtet großer Nähe kann man nur den mittleren Werthen aus einer großen Zahl von Beobachtungen Zutrauen schenken.

Die hauptsächlichen Ursachen der Fehler sind die Winde und die Unregelmäßigkeit in der Verbreitung der Temperatur. Wäre die Richtung der Bewegung der Luft horizontal; so scheint es nicht, daß diese Bewegung die Höhe des Barometers ändern kann, vorausgesetzt, daß die Barometerkugel vor dem Winde nicht durch eine Vorrichtung geschützt sei, in Folge deren der Druck vermindert oder vermehrt wird. Streicht der Wind aber in die

Höhe oder in die Tiefe; so hält sich das Quecksilber nothwendig resp. niedriger oder höher, als es der Fall sein würde, wenn kein Wind vorhanden wäre, abgesehen von den Unregelmäßigkeiten, welche aus der Art und Weise hervorgehen können, wie die Kugel dem Winde ausgesetzt oder vor demselben geschützt ist.

Was die Temperatur betrifft; so sind die Fehler, welche aus der ungleichförmigen Abnahme derselben hervorgehen, vielleicht nicht so groß, als diejenigen, welche daraus entstehen, daß die Beobachtung des Thermometers, statt die wahre Temperatur der horizontalen Luftschicht, in der man sich befindet, anzugeben, nur eine örtliche Temperatur ergibt, welche zum großen Theil durch die Ausstrahlung des Erdbodens und der umgebenden Körper hervorgebracht wird. Das Thermometer für die Temperatur der Luft muß übrigens in der Höhe des Auges aufgestellt und vor der Sonne nur durch den Stab geschützt sein, an welchem es befestigt ist.

Die Gefäßbarometer, deren Niveau vermittelst einer Druckschraube regulirt wird, welche die Oberfläche des Queckſilbers mit einer festen Spitze in Berührung bringt, werden im Allgemeinen für die besten gehalten. Dieselben müssen vertikal gestellt und so wol vor der Sonne, wie vor dem Winde geschützt sein.

Es ist von Wichtigkeit, die Temperatur des Queckſilbers genau zu kennen. Ein in der Fassung angebrachtes Thermometer genügt zu diesem Zwecke nicht. Man hat eine andere Vorrichtung vorgeschlagen, welche darin besteht, daß man eine zweite Röhre gleich der des Barometers in der Luft aufhängt, welche verschlossen und mit Queckſilber gefüllt, und in welche das Thermometer getaucht ist.

Die Höhenmessungen erfordern durchaus die Zusammenwirkung zweier Beobachter, welche beide mit ähnlichen und sorgfältig verglichenen Instrumenten versehen sind. Die entsprechenden Beobachtungen in den oberen und unteren Standpunkten müssen gleichzeitig und womöglich zwischen elf Uhr vormittags und Ein Uhr nachmittags angestellt werden.

Zweiter Abschnitt.

Die Prinzipien der Hydraulik.

I. Die Fundamentalgleichungen der Hydraulik.

§. 53. Gegenstand der Hydraulik.

Die Hydraulik oder Hydromechanik befaßt sich mit der Untersuchung der Bewegungen, welche die Flüssigkeiten unter der Einwirkung bewegender Kräfte unter verschiedenen Umständen annehmen. Sie sucht die Beziehungen auf, welche zwischen der Größe der bewegenden Kräfte Einerseits und den Geschwindigkeiten, Pressungen, Dichtigkeiten und sonstigen mechanischen Eigenschaften der in Bewegung versetzen Theile der Flüssigkeit andererseits stattfinden.

Die Lehre von der Bewegung der unpreßbaren Flüssigkeiten nennt man vorzugsweise Hydraulik, während man die Untersuchungen über die Bewegung der elastischen Flüssigkeiten wol unter dem engeren Namen der Pneumatik begreift.

§. 54. Kurze Wiederholung einiger wichtigen Lehrsätze der Mechanik.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird häufig von einigen der wichtigsten mechanischen Lehrsätze Anwendung gemacht werden, welche sich auf die Bewegung eines Systemes von Körpern beziehen. Um die Hinweisung auf diese allgemeinen Sätze im Texte möglichst abkürzen zu können, möchte es nicht unzweckmäßig sein, dieselben dem Leser mit wenigen Worten ins Gedächtniß zurückzurufen.

1) Das d'Alembertſche Prinzip.

Mehrere Körper ſeien dergeſtalt zu einem Syſteme untereinander verbunden, daß ſich keiner derſelben ſelbſtſtändig bewegen kann, ohne auf die Bewegung der übrigen einen beſtimmten Einfluß zu äußern. m, m_1, m_2 . . . ſeien die elementaren Maſſen dieſer Körper und P, P_1, P_2 . . . die äußeren Kräfte, welche auf dieſelben angebracht ſind.

Da ſich kein Körperelement dieſes Syſtemes frei bewegen kann, und bei ſeiner Bewegung ſtets die Bewegung der übrigen mit affiziren wird; ſo leuchtet ein, daß Ein Theil der Kräfte P, P_1, P_2 . . . auf die wirkliche Bewegung der Maſſen m, m_1, m_2 . . . verwandt werden und denſelben eine ſolche Bewegung mittheilen wird, als wenn dieſe Maſſen ganz frei wären, während der andere Theil jener Kräfte von den Bändern des Syſtemes aufgenommen und durch deren Widerſtandsfähigkeit ebenſo vernichtet wird, wie es der Fall ſein würde, wenn ſich die letzteren Theile der obigen Kräfte an dem gegebenen Syſteme im Gleichgewichte befänden. Nimmt man nun an, die Maſſen m, m_1, m_2 . . . empfingen eine Bewegung, welche ſich in der Zeiteinheit, und zwar in dem Augenblicke, wo man das Syſtem betrachtet, reſp. um die Größen f, f_1, f_2 . . . beſchleunigte; ſo würden die zuerſt erwähnten Theile der Kräfte P, P_1, P_2 . . . welche die wirkliche Bewegung der Maſſen hervorbrächten, mf, m_1f_1, m_2f_2 . . . ſein. Dieſe Theile nennen wir die wirkſamen Kräfte des Syſtemes. Die übrigen Theile der auf das Syſtem angebrachten Kräfte, welche durch die Widerſtandsfähigkeit der Verknüpfungen der einzelnen Maſſen vernichtet werden, befinden ſich, wie ſchon erwähnt, mit den Widerſtänden jener Verknüpfungsbänder im Gleichgewichte.

Brächte man alſo auf das Syſtem in den Maſſen m, m_1, m_2 . . . noch Kräfte an, welche den wirkſamen Kräften der Größe nach gleich, der Richtung nach aber direkt entgegengeſetzt wären, alſo Kräfte, welche reſp. durch $-mf$, $-m_1f_1$, $-m_2f_2$ . . . ausgedrückt wären; ſo müßten dieſe nebſt den Kräften P, P_2, P_3 . . . das Syſtem in den Zuſtand des Gleichgewichtes oder der gleichförmigen Bewegung verſetzen.

In dieſem Satze, wonach zwiſchen den äußerlich angebrachten Kräften P, P_1, P_2 . . . und den in entgegengeſetz-

ten Richtungen genommenen wirksamen Kräften mf, $m_1 f_1$, $m_2 f_2$ ... unter Berücksichtigung der gegebenen Verknüpfungsweise der einzelnen Theile des Systemes, sowie unter Beachtung der durch diese Verknüpfung hervorgerufenen inneren Wirkungen, Gleichgewicht stattfinden muß, besteht das d'Alembertsche Prinzip. Es wird hierbei noch bemerkt, daß sich die inneren Wirkungen zwischen den Bändern des Systemes in den meisten Fällen für sich allein schon im Gleichgewichte halten und dann bei der Anwendung des vorstehenden Prinzipes ganz unberücksichtigt bleiben können. Einer genauen Prüfung in dieser Hinsicht hat man die inneren Kräfte besonders bei Systemen zu unterwerfen, wo die Bänder kompressibel oder elastisch sind.

Um die Bedingung, daß an irgend einem Systeme verschiedene Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, wie es nach dem d'Alembertschen Prinzipe von den äußerlich angebrachten Kräften und den in entgegengesetzter Richtung genommenen wirksamen Kräften gefordert wird, analytisch auszudrücken, kann man sich in vielen Fällen mit Vortheil des folgenden Prinzipes bedienen.

2) Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Dieses Prinzip, durch welches man in den Stand gesetzt wird, die Bedingung auszudrücken, unter welcher gewisse auf ein System angebrachte Kräfte im Gleichgewichte sind, lautet:
Wenn mehrere auf ein System angebrachte Kräfte im Gleichgewichte sind, und man nöthigt die Angriffspunkte dieser Kräfte, unendlich kleine Räume zu beschreiben, welche übrigens der gegebenen Verbindungsweise des Systemes entsprechen müssen, nennt ferner das Produkt aus irgend Einer dieser Kräfte in den Weg, welchen ihr Angriffspunkt bei dieser ungemein kleinen Bewegung parallel zu ihrer Richtung beschrieben hat, das virtuelle Moment jener Kraft; so ist die Summe der virtuellen Momente für alle Kräfte gleich null, wobei die Momente derjenigen Kräfte als positiv zu nehmen sind, deren Angriffspunkte sich in direkter Richtung ihrer Wirkungen bewegen, während die Momente der übrigen Kräfte, deren Angriffspunkte sich in entgegengesetzten Richtungen der darauf angebrachten Kräfte bewegen, negativ zu nehmen sind.

Bezeichnet man also irgend eine Kraft des Systemes mit P, den wirklichen Weg, welchen ihr Angriffspunkt bei einer sehr

kleinen Bewegung aller Theile des Systemes durchläuft, mit r, den Neigungswinkel zwischen der Linie r und der Richtung der Kraft P mit α; so wird $r\cos\alpha = p$ der Weg sein, welchen der Angriffspunkt von P parallel zu der Richtung dieser Kraft beschreibt. Die Entfernung $p = r\cos\alpha$ nennt man auch die virtuelle Geschwindigkeit der Kraft P, während $Pp = Pr\cos\alpha$ das virtuelle Moment derselben ist.

Nach dem vorstehenden Prinzipe hat man, wenn die Kräfte P miteinander im Gleichgewichte sein sollen, und ΣPp die Summe der Werthe von Pp für die verschiedenen auf das System angebrachten Kräfte bezeichnet,

$$\Sigma Pp = \Sigma Pr\cos\alpha = o \qquad \ldots\ (230)$$

Was die Werthe der unendlich kleinen Wege p betrifft, welche die Angriffspunkte der Kräfte P bei einer sehr kleinen Bewegung des Systemes in parallelen Richtungen zu den Richtungen der zugehörigen Kräfte beschreiben; so sind dieselben zwar insofern willkürlich, wie es willkürlich bleibt, in welcher Weise man alle Theile des Systemes unendlich wenig aus ihrer früheren Lage bringt, übrigens sind jene Wege der nothwendigen Bedingung unterworfen, daß sie der gegebenen Verbindung der einzelnen Angriffspunkte der Kräfte zu einem Systeme ein Genüge leisten müssen.

Diese letztere Bedingung wird man immer leicht berücksichtigen können, sobald das System der mechanischen Verbindung aller seiner Theile nach genau gegeben ist; man wird in einem solchen Falle immer eine analytische Beziehung aufstellen können, welche anzeigt, in welcher Weise der Werth des sehr kleinen Raumes p von dem besonderen Orte des zugehörigen Angriffspunktes im Systeme und von dem Werthe irgend eines anderen als gegeben angenommenen Weges eines anderen Angriffspunktes abhängig ist. Befände sich das ganze System, an welchem sich die Kräfte P im Gleichgewichte erhalten sollen, in einer Bewegung, welcher zufolge der Angriffspunkt einer Kraft P in der Zeiteinheit und in paralleler Richtung zu dieser Kraft den Raum v durchlaufen würde, wenn die Bewegung dieses Punktes plötzlich gleichförmig würde, sodaß also v die Geschwindigkeit jenes Angriffspunktes in paralleler Richtung zur Kraft P bezeichnete;

so würde der unendlich kleine Raum, welchen derselbe Punkt, in dem Zeitelemente dt in der Richtung der Kraft durchliefe, gleich vdt sein. Es fragt sich, ob man diese Größe vdt nicht für die obige virtuelle Geschwindigkeit p des Angriffspunktes der Kraft P substituiren könnte.

Man begreift, daß eine Substitution von vdt für p bei allen solchen Systemen zulässig ist, wo die innere mechanische Verknüpfung der einzelnen Theile von der Zeit unabhängig ist, jedoch ganz unzulässig in den Fällen, wo sich die Art der Verbindung der Theile des Systemes mit der Zeit ändert, weil alsdann am Ende der Zeit dt, in welcher der Raum vdt wirklich beschrieben wird, die Art der Verbindung der Theile des Systemes eine andere geworden ist, als sie im Anfange dieser Zeit war. Mit Ausschluß der zuletzt gedachten Fälle, welche sich übrigens bei den praktischen Aufgaben seltener ereignen, kann man also den analytischen Ausdruck für das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in die Form

$$\Sigma P v dt = o \qquad \ldots . (231)$$

bringen. Hierbei ist noch Folgendes zu bemerken: Es gibt Systeme von Körpern, deren Verbindung sich mit der Zeit oder auch mit der besonderen Lage im Raume, insofern diese Lage von der Zeit selbst abhängig ist, ändert, auf welche also die vorstehende Formel nicht ohne Weiteres in Anwendung gebracht werden könnte. Diese Systeme sind aber zuweilen von der Art, daß ihre physische Konstitution eine jede beliebige Formveränderung zuläßt, indem dabei gewisse Kräfte zwischen den Bändern des Systemes auftreten, welche gleichzeitig mit überwunden werden müssen. Bei solchen Systemen wird man also auch eine jede Verrückung, welche dieselben bei einer selbstständigen Bewegung während der sehr kleinen Zeit dt annehmen, als eine virtuelle Verrückung ansehen können, wenn man dabei nur auf die besonderen Kräfte Rücksicht nimmt, welche sich in Folge einer solchen Bewegung zwischen den Systembändern einstellen. Diese Kräfte sind alsdann mit unter den Kräften P zu begreifen.

Zu der letzteren Klasse von Körpersystemen gehören alle Verbindungen aus elastischen oder kompressibelen und dehnbaren Substanzen. Dieselben könnten, wenn sie in irgend einer

Lage wären, zwar nur auf gewisse Weisen so verschoben werden, daß sich dabei keine neuen Kräfte äußerten; brächte man jedoch geeignete Kräfte auf diese Systeme an; so könnte man dieselben in jede beliebige Form bringen, also auch in diejenige Form, welche sie während einer gegebenen Bewegung in der Zeit *dt* wirklich annehmen. Unter Berücksichtigung der zuletzt erwähnten, bei einer solchen Verschiebung auftretenden Elastizitätskräfte würde man mithin auch die Formel (231) bei elastischen Systemen in Anwendung bringen können.

Handelte es sich nach dem Vorstehenden um eine in Bewegung begriffene unpreßbare oder auch um eine elastische flüssige Masse, an welcher sich gewisse Kräfte P im Gleichgewichte befinden sollten; so würde man hierauf unbedingt die Formel (231) anwenden können, sobald die Flüssigkeit unpreßbar ist, indem die Verbindungsweise der einzelnen Massentheilchen unter sich von der Zeit ganz unabhängig ist, und man sehr wohl annehmen kann, daß dieselben durch eine willkürliche Verrückung ihrer Örter in dieselben Lagen gebracht seien, in welche sie durch die Bewegung der ganzen Flüssigkeit während eines Zeitelementes wirklich gelangen. Aber auch wenn die Flüssigkeit elastisch ist, bleibt die Formel (231) anwendbar, sobald man alsdann nur das Gesetz der Elastizität gehörig berüchsichtigt, und die während einer Bewegung durch das Zeitelement *dt* auftretenden Wirkungen der Elastizität mit zu den Kräften P rechnet.

3) Das Prinzip der lebenden Kräfte.

Dieses Prinzip dient ebenso, wie das d'Alembertsche Prinzip, dazu, um bei einem in Bewegung begriffenen Systeme, dessen innere Verknüpfung von der Zeit jedoch unabhängig sein muß, eine analytische Beziehung zwischen den auf das System angebrachten Kräften und den Geschwindigkeiten, welche die einzelnen Theile desselben annehmen, auszudrücken. Dasselbe lautet:

Wenn die an einem Systeme angebrachten Kräfte nicht im Gleichgewichte sind, und demzufolge eine Bewegung des Systemes bewirkt haben, so ist die gesammte Wirkungsgröße oder die Arbeit aller jener Kräfte innerhalb einer gewissen Zeit gleich der Hälfte der lebenden Kraft, welche sämmtliche Theile des Systemes während derselben Zeit gewonnen haben.

Unter der Wirkungsgröße oder der Arbeit einer Kraft

P wird hierbei das Produkt dieser Kraft in den Weg verstanden, welchen der Angriffspunkt derselben in dem gedachten Zeitraume in paralleler Richtung zu der Wirkung der Kraft zurückgelegt hat. Diese Größe ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem die Bewegung des Angriffspunktes in direkter oder in gerade entgegengesetzter Richtung der Kraft P erfolgt. Beschriebe also der gedachte Angriffspunkt der Kraft P eine krummlinige Bahn, indem sich derselbe am Ende der Zeit t in einem Orte befände, dessen Abstand von einem anderen festen, in derselben Bahn liegenden Punkte gleich s wäre, wobei s längs des Kurvenbogens gemessen und eine Funktion von t wäre; so würde der fragliche Punkt während der Zeit dt um die sehr kleine, als gerade anzusehende Länge ds fortschreiten, und wenn sich die Richtung der Kraft P unter dem Winkel φ gegen das Kurvenelement ds neigte; so würde $ds\cos\varphi$ der von dem Angriffspunkte in paralleler Richtung zur Kraft P beschriebene Raum und $P\,ds\cos\varphi$ die Wirkungsgröße oder die Arbeit der Kraft P während des Zeitelementes dt, mithin

$$\int_0^t P\,ds\cos\varphi$$

die Arbeit derselben Kraft während des Zeitraumes t sein. Die Summe

$$\Sigma\int_0^t P\,ds\cos\varphi$$

aller dieser Wirkungsgrößen für die verschiedenen auf das System angebrachten Kräfte wird die oben erwähnte gesammte Wirkungsgröße ergeben, welche der Hälfte der in der Zeit t gewonnenen lebenden Kraft des Systemes gleich sein muß.

In den vorstehenden Ausdrücken müssen natürlich sämmtliche unter dem Integralzeichen stehenden Größen als Funktionen von t gegeben sein; man erkennt übrigens leicht, daß man den Zustand des Systemes, anstatt zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten, auch zwischen zwei bestimmten räumlichen Lagen betrachten kann, wobei die ebenerwähnten Größen Funktionen von s

sein müssen, und man für die gesammte Wirkungsgröße aller Kräfte zwischen den Lagen o und s

$$\Sigma \int_o^s P\,ds\cos\varphi$$

erhalten würde.

Unter der lebenden Kraft eines Körpers versteht man das Produkt seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit. Ist daher m die Masse irgend eines Elementes des gegebenen Systemes, ferner V dessen Geschwindigkeit in dem zuerst betrachteten Zustande und v dessen Geschwindigkeit in dem zuletzt betrachteten Zustande; so wird resp. mV^2 und mv^2 die lebende Kraft dieses Elementes im ersten und letzten Zustande sein. Eine für sämmtliche Massentheilchen des Systemes genommene und resp. durch ΣmV^2 und Σmv^2 dargestellte Summe ergibt hiernach die lebende Kraft des ganzen Systemes im ersten und letzten Zustande, sodaß

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mV^2$$

die in dem gedachten Zeitraume gewonnene lebende Kraft des Systemes ist.

Das Prinzip der lebenden Kräfte kann also analytisch durch die Formel

$$\Sigma \int P\,ds\cos\varphi = \tfrac{1}{2}(\Sigma mv^2 - \Sigma mV^2) \quad \ldots\ (232)$$

ausgedrückt werden.

Es muß nochmals ausdrücklich erinnert werden, daß das Prinzip der lebenden Kräfte nur für ein solches System von Körpern gültig ist, deren Verbindungsweise von der Zeit unabhängig ist. Dasselbe drückt demnach eine weniger allgemeine Eigenschaft der Bewegung eines Systemes aus, wie das d'Alembert'sche Prinzip, und ist überhaupt nur für die Fälle anwendbar, für welche die Formel (231) als zulässig befunden wurde, indem das in Rede stehende Prinzip erst aus der letzteren Formel, in Verbindung mit dem d'Alembertschen Prinzipe, abgeleitet ist. Da unter diese Fälle übrigens auch die weiter oben näher erörterten Fälle mit begriffen werden können, wo der Zustand des

Systemes zwar nicht ganz unabhängig von der Zeit ist, wo man aber die Kräfte kennt, welche sich bei einer jeden beliebigen Formveränderung zwischen den Bändern des Systemes äußern, wie bei Systemen von elastischen Körpern; so folgt, daß das Prinzip der lebenden Kräfte auch auf die letztere Klasse von Systemen ausgedehnt werden könne, wenn man dabei nur die Wirkungsgrößen derjenigen Kräfte gehörig mit in Rechnung zieht, welche sich zwischen den elastischen, kompressibelen oder dehnbaren Bändern des Systemes äußern.

4) Der Carnotsche Lehrsatz und andere auf plötzliche Änderung der Geschwindigkeit Bezug habende Sätze.

Wenn sich in irgend einem Systeme von unelastischen Körpern ein plötzlicher Stoß ereignet, in Folge dessen die Geschwindigkeiten gewisser Massentheile desselben augenblicklich verändert werden; so lehrt der Carnotsche Lehrsatz, daß der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebender Kraft des Systemes gleich der lebenden Kraft ist, welche den beim Stoße verlorenen Geschwindigkeiten zukommt.

Ist also die Geschwindigkeit eines Theilchens von der Masse m vor dem Stoße gleich V und nach dem Stoße in der nämlichen Richtung gleich v, also $V - v$ die durch den Stoß verlorene Geschwindigkeit dieses Theilchens; so wird $m(V-v)^2$ die dieser verlorenen Geschwindigkeit entsprechende lebende Kraft sein. Nimmt man diese lebende Kraft für alle Theilchen des Systemes; so spricht der Carnotsche Lehrsatz aus, daß die dadurch erhaltene Summe

$$\Sigma m(V-v)^2 \qquad \ldots . \quad (233)$$

den Verlust an lebender Kraft darstelle, welchen das ganze System durch den Stoß erlitten habe.

Bei dieser Darstellung des durch den Stoß zwischen unelastischen Körpern herbeigeführten Verlustes an lebender Kraft durch die Formel (233) ist vorausgesetzt, daß irgend ein Massentheilchen m nur die Größe seiner Geschwindigkeit ändere, aber seine Richtung auch nach dem Stoße ungeändert beibehalte. Ist Dies jedoch nicht der Fall, und bezeichnen resp. U_1 V_1 W die Komponenten der Geschwindigkeit des Theilchens m parallel zu drei rechtwinkligen Axen vor dem Stoße und resp. u v w diese Komponen-

ten nach dem Stoße; so ist der durch den Stoß bedingte Verlust an lebender Kraft gleich

$$\Sigma m\,[(U-u)^2+(V-v)^2+(W-w)^2] \qquad \ldots\ (233^a)$$

Ein dem Carnotschen Lehrsatze analoger Satz ist der folgende.

Beachten wir zuvörderst die Vorgänge, welche bei dem Stoße unelastischer Körper vor sich gehen: Die Oberflächen der Körper, welche vor dem Stoße ganz voneinander getrennt waren, treffen mit gewissen Geschwindigkeiten gegeneinender, drücken sich zusammen, indem sie durch ihren Widerstand einen Theil der lebenden Kraft des Systemes vernichten, verharren alsdann in dem Zustande der größten Kompression, indem sie fortan in der Richtung des Stoßes keine Wirkung mehr gegeneinander ausüben und so gewissermaaßen ein neues System bilden, in welchen zwei oder mehrere Körper des früheren Systemes zu einem einzigen Körper verschmolzen sind.

Denken wir uns also ein System von Körpern, zwischen denen plötzlich Kräfte auftauchen, welche die einzelnen Körper oder Körpertheilchen voneinander zu *trennen* streben und dieselben *auseinander schleudern*; so leuchtet ein, daß diese Kräfte dem Systeme einen *Gewinn* an lebender Kraft bringen werden, welcher gleich

$$\Sigma m\,[(U-u)^2+(V-v)^2+W-w)^2] \qquad \ldots\ (233^b)$$

ist, worin $u\ v\ w$ die Komponenten der Geschwindigkeit des Theilchens m *vor* der Wirkung und U V W diese Komponenten *nach* der Wirkung der fraglichen Kräfte bezeichnen. Denn man erkennt leicht, daß durch solche Kräfte die Wirkung eines *Stoßes*, wie er vorhin betrachtet ist, als geradezu aufgehoben betrachtet werden kann.

Der durch die Formel 233^b) dargestellte *Gewinn* an lebender Kraft tritt auf, sobald sich z. B. in einem-Systeme von Körpern eine *Explosion* ereignet, oder auch wenn *elastische* Körper fest aneinander gedrückt waren und plötzlich frei gelassen werden.

Endlich wird noch bemerkt, daß wenn zwischen vollkommen *elastischen* Körpern ein *Stoß* erfolgt, dieselben zuvörderst, bis ihre Kompression den höchsten Grad erreicht hat, einen *Verlust*

an lebender Kreft erleiden, welcher durch die Formel (233ª) dargeſtellt iſt, darauf aber vom Augenblicke der größten Kompreſſion bis zur Beendigung des Stoßes in Folge der Rückwirkung ihrer elaſtiſchen Kräfte wieder einen gleichen durch die Formel (233ᵇ) dargeſtellten Gewinn an lebender Kraft erfahren, wenn man in beiden Formeln mit u v w die Komponenten der Geſchwindigkeit des Theilchens m im Augenblicke der größten Kompreſſion bezeichnet.

Hieraus folgt, daß bei einem Stoße zwiſchen vollkommen elaſtiſchen Körpern, wenn die Rückwirkung der elaſtiſchen Flächen vollſtändig erfolgt, weder ein Verluſt, noch ein Gewinn an lebender Kraft eintritt.

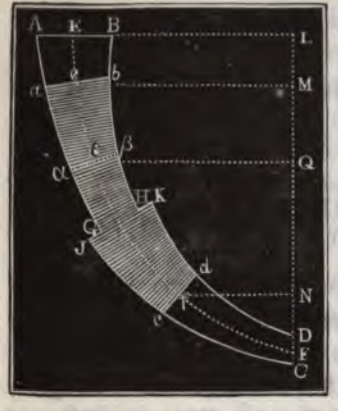
§. 55. Allgemeine Gleichungen für die Bewegung einer Flüſſigkeit in einem röhrenförmigen Gefäße.

Da der allgemeinſte Fall der Bewegung irgend einer Flüſſigkeit auf Formeln führt, zu deren Behandelung die jetzigen Kräfte der Analyſis nicht ausreichen; ſo hat man ſich genöthigt geſehen, behuf Erzielung praktiſcher Reſultate, in die Bewegung der flüſſigen Maſſen gewiſſe Hypotheſen einzuführen, welche geeignet ſind, den verwickelten Zuſammenhang zwiſchen den Bewegungen der einzelnen Maſſentheilchen möglichſt zu vereinfachen, ohne dabei von der Wahrheit merklich abzuweichen.

Dieſe Hypotheſen beſtehen beſonders darin, daß man annimmt, die in einem Gefäße ſich bewegende Flüſſigkeit ergieße ſich durch lauter Röhren, deren Querſchnitte ungemein klein, wennauch nicht überall einander gleich, ſeien. In einer jeden ſolchen Röhre bewege ſich die flüſſige Maſſe ſo, daß alle Theilchen Ein und derſelben ſehr dünnen Querſchicht mit gleicher Geſchwindigkeit in der Richtung der Axe der Röhre forteilen, ſodaß die ganze Querſchicht parallel zu ſich ſelbſt in der Axenrichtung der Röhre fortrückt, und dabei immer den ganzen Querſchnitt der Röhre ausfüllt, indem ihre Dicke parallel zur Axe mit dieſem Querſchnitte und den ſonſt noch ſich ändernden Preſſungsverhältniſſen variirt. In der letzteren Annahme, welche von der wahren Bewegung einer flüſſigen Maſſe in einem röhrenförmigen Gefäße um ſo weniger verſchieden ſein wird, je kleiner die normalen

Querschitte dieses Gefäßes sind, besteht die Hypothese des Parallelismus der Querschichten.

Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Temperatur der Flüssigkeit in allen Theilen dieselbe sei, und sich mit dem Grade der Expansion oder Kompression, welche die Flüssigkeit im Laufe der Bewegung erfährt, nicht ändere.



Betrachten wir jetzt die Bewegung irgend einer flüssigen Masse *abdc* in einem röhrenförmigen Gefäße ABDC, auf welches sich ohne erhebliche Abweichung von der Wahrheit die Hypothese von dem Parallelismus der Querschichten anwenden läßt, unter folgenden Voraussetzungen:

1) Auf die obere Endfläche *ab* wirke in der Richtung *ef* für jede Flächeneinheit des Querschnittes *ab* die Kraft p'; auf die untere Endfläche *cd* dagegen in entgegengesetzter Richtung *fe* die Kraft p'' für die Flächeneinheit. Unter diesen Kräften hat man sich in der Regel die Pressungen der äußeren Mittel, z. B. der atmosphärischen Luft zu denken, in welche sich die Flüssigkeit ergießt. Übrigens kann man sich darunter auch andere Druckkräfte, bei einer elastischen Flüssigkeit z. B. unter p'' den Widerstand für jede Flächeneinheit vorstellen, welchen ein in der Richtung der Axe *f F* fortzuschiebender Stempel, wie etwa der Kolben einer Dampfmaschine, leistet.

2) Ferner seien in gewissen festen Punkten des Gefäßes auf die Flüssigkeit Kräfte angebracht, welche der Bewegung direkt entgegenwirken, deren Angriffspunkte sich aber ebenso, wie der Druck p'' auf *cd*, mit der Flüssigkeit bewegen; jedoch kann die Geschwindigkeit dieser Angriffspunkte in der Richtung der Axe *ef* von der Geschwindigkeit verschieden sein, welche die in demselben Punkte befindlichen Theilchen der Flüssigkeit besitzen. Irgend Eine dieser Kräfte, unter denen man sich z. B.

den Widerstand der Schaufel eines Wasserrades oder einer Turbine denken kann, sei R.

3) Auf ein jedes Massentheilchen irgend einer normalen Querschicht $\alpha\beta$ der Flüssigkeit wirke eine stetige Kraft, deren Richtung für alle Theilchen derselben Schicht konstant sei und sich unter dem Winkel ϑ gegen die Axe der Röhre neige, und welche im Stande sei, der Materie in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit f mitzutheilen. Wenn es sich um die Bewegung einer schweren Flüssigkeit in einer ruhenden Röhre handelte, deren Richtung überall vertikal von oben nach unten gekehrt ist; so würde $f=g=31{,}2644$ Fuß für die Sekunde werden. Handelte es sich um die Bewegung einer solchen Flüssigkeit in einer bewegten Röhre; so müßten bei der Bestimmung des Werthes und der Richtung von f auch diejenigen Kräfte mit berücksichtigt werden, welche durch die Bewegung der ganzen Röhre hervorgerufen würden, z. B. die Zentrifugalkräfte, wenn sich die Röhre, wie bei einem horizontalen Wasserrade, im Kreise um sich selbst drehete.

4) Die Form der Röhre EF sei von der Art, daß sich die Größe ihrer Querschnitte im Allgemeinen nur stetig, d. h. dergestalt ändere, daß die Dimensionen einer jeden folgenden sehr dünnen Schicht der Flüssigkeit in normaler Richtung auf der Axe der Röhre nur unendlich wenig von den entsprechenden Dimensionen der nächst vorhergehenden Schicht verschieden seien. Jedoch seien mehrere Stellen an der Röhre vorhanden, wie die bei GH, wo sich der Querschnitt plötzlich um eine endliche Größe gegen den früheren vergrößere, und von GH auf JK übergehe, was auch eine plötzliche endliche Veränderung der Geschwindigkeit v_1 der Flüssigkeit in dem Querschnitte GH zu der Geschwindigkeit v_2 in dem Querschnitte JK zur Folge habe, wie wenn die Flüssigkeitsschicht bei GH plötzlich einen Stoß erlitte und dadurch von der größeren Geschwindigkeit v_1 auf die kleinere Geschwindigkeit v_2 gebracht würde.

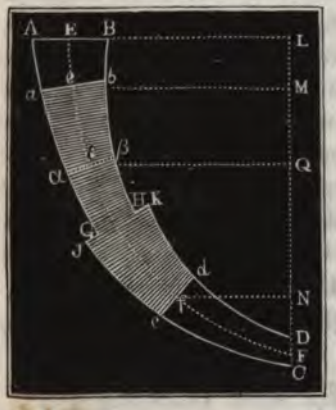
5) Die Flüssigkeit erleide auf eine gewisse Strecke an den Wänden der Röhre eine Art von Reibung, welche theils durch die Adhäsion der flüssigen Masse an die starren Gefäßwände, theils dadurch hervorgebracht wird, daß diese Wände nicht

absolut glatt sind und durch die darauf befindlichen Erhabenheiten Störungen in der freien Bewegung der Flüssigkeit oder Verluste an lebender Kraft verursachen. Die Wirkung dieser uneigentlich mit dem Namen Reibung belegten Kraft, auf die Masseneinheit der Flüssigkeit bezogen, oder die Geschwindigkeit, welche diese Kraft der Materie in der Zeiteinheit zu ertheilen oder zu rauben fähig ist, wird allgemein eine Funktion von der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem besonderen Querschnitte und von den Dimensionen dieses Querschnittes sein, und werde mit **F** bezeichnet.

Die vorstehend genannten Kräfte p', p'', **R**, f und **F** brauchen nicht nothwendig konstant zu sein, sondern können im Allgemeinen mit der Zeit variiren. Ist das Letztere wirklich der Fall; so sind unter jenen Größen diejenigen Werthe der fraglichen Kräfte zu verstehen, welche gleichzeitig am Ende der Zeit t stattfinden.

Außer den im Vorstehenden angeführten Bezeichnungen sei

ω die Fläche irgend eines normalen Querschnittes $\alpha\beta$ in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume der Röhre,



O', **O''** die veränderlichen Querschnitte ab, cd, in denen sich die obere und untere Fläche der Flüssigkeit am Ende der Zeit t befinden,

ω_1, ω_2 zwei unmittelbar aufeinander folgende bestimmte Querschnitte **GH** und **JK** der Röhre, welche sich plötzlich um unendliche Größen ändere,

s die Länge des Theiles $E\varepsilon$ der Axe der Röhre von irgend einem festen Punkte **E** aus bis zum Querschnitte $\alpha\beta$,

s', s'' die Längen der Theile **E***e* und **E***f* der Axe der Röhre,

v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Querschnitte $\alpha\beta$ am Ende der Zeit t, wobei dieselbe positiv gedacht wird, wenn sie in der Richtung $e\varepsilon f$ erfolgt,

v', v'' die Geschwindigkeit der Flüssigkeit resp. in den beiden Endflächen ab, cd zu derselben Zeit,

v_1, v_2 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit resp. in den Querschnitten GH und JK zu derselben Zeit,

$\varkappa$ die Geschwindigkeit des Angriffspunktes Einer der Kräfte R zu derselben Zeit,

μ die Dichtigkeit oder die in der Volumeinheit enthaltene Masse der Flüssigkeit in der Schicht $\alpha\beta$ am Ende der Zeit t,

μ_1, μ_2 die Dichtigkeit der Flüssigkeit resp. in den Querschnitten GH und JK zu derselben Zeit,

p der Druck der Flüssigkeit im Querschnitte $\alpha\beta$ auf die Flächeneinheit am Ende derselben Zeit t,

M die Masse der Flüssigkeit, welche sich, vom Ende der Zeit t aus gerechnet, in der Zeiteinheit durch den Querschnitt $\alpha\beta$ der Röhre ergießt.

Bringen wir auf die in Bewegung begriffene flüssige Masse $abdc$, welcher wir im Allgemeinen die Eigenschaft der Elastizität nach irgend einem Gesetze beilegen, das Prinzip der lebenden Kräfte in Anwendung, was nach dem vorhergehenden Paragraphe zulässig ist, sobal dwir nicht versäumen, die Wirkungen der elastischen Kräfte zwischen den verschiedenen Massentheilchen der Flüssigkeit mit in Rechnung zu ziehen.

Zu diesem Ende betrachten wir die Flüssigkeit in ihrem Übergange aus dem Zustande, in welchem sie sich am Ende der Zeit t befindet, zu dem, in welchem sie sich am Ende der Zeit $t+dt$ befinden wird, suchen die Wirkungsgrößen zu bestimmen, welche die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte während dieser Zeit beschreiben, und setzen dieselben gleich der Hälfte der lebenden Kraft, welche die Flüssigkeit während des Zeitelementes dt gewonnen hat.

Die unter Nr. 1, 2, 3 und 5 vorhin gedachten Kräfte liefern nur während des Zeitelementes dt folgende Wirkungsgrößen:

ad 1) die auf den obersten Querschnitt O' wirkende Kraft $O'p'$, deren Angriffspunkt sich mit der Geschwindigkeit v' in direkter Richtung fortbewegt, also in der Zeit dt den Weg $v'dt$ zurücklegt, liefert die Wirkungsgröße $O'p'v'dt$.

Die auf den untersten Querschnitt O'' wirkende Kraft $O''p''$, deren Angriffspunkt sich mit der Geschwindigkeit v''

in direkt entgegengesetzter Richtung jener Kraft bewegt, liefert die Wirkungsgröße $-O''p''v''dt$.

ad 2) Da der Weg, welchen eine jede der Kräfte R in direkt entgegengesetzter Richtung ihrer Wirkung während der Zeit dt zurückgelegt, gleich udt ist; so ist die Wirkungsgröße derselben gleich $-Rudt$, und die Summe der Wirkungsgrößen aller ähnlichen Kräfte, wenn deren mehrere vorhanden sind, gleich $-\Sigma Rudt = -dt\Sigma Ru$.

ad 3) Die Masse einer Querschicht der Flüssigkeit bei $\alpha\beta$ von der unendlich geringen Stärke ds oder von dem Volum ωds ist $\mu\omega ds$; demnach der Betrag der in dieselbe stetig wirkenden Kraft gleich $f\mu\omega ds$. Diese Kraft wirkt unter dem Neigungswinkel ϑ gegen die Axe der Röhre bei ε. Da sich nun der Mittelpunkt der Schicht $\alpha\beta$ mit der Geschwindigkeit v, also in der Zeit dt um die Länge vdt in der Richtung der Axe der Röhre fortbewegt; so folgt, daß der Weg, welchen dieser Punkt oder der Angriffspunkt der Kraft $f\mu\omega ds$ während derselben Zeit in paralleler Richtung zu der Wirkung dieser Kraft beschreibt, gleich $vdt\cos\vartheta$, also die gesuchte Wirkungsgröße jener Kraft gleich $f\mu\omega v\cos\vartheta.dsdt$ ist, daß man also für die Summe der Wirkungsgrößen aller in die flüssige Masse $abdc$ wirkenden ähnlichen Kräfte $dt\int_{s'}^{s''} f\mu v\omega\cos\vartheta.ds$ hat, wobei das Integral, wenn die Röhre plötzliche Absätze, wie bei JK besitzt, in mehrere zerlegt werden muß, welche sich auf die einzelnen stetig gebildeten Theile der Röhre beziehen.

ad 5) Auf die Schicht $\alpha\beta$ der Flüssigkeit von der Masse $\mu\omega ds$ wirkt als Reibung die Kraft $F\mu\omega ds$ ein, deren Angriffspunkt in der Zeit dt ebenfalls den Weg vdt, aber in direkt entgegengesetzter Richtung jener Kraft durchläuft, sodaß die für die Reibung in Rechnung zu bringende Wirkungsgröße für die Schicht $\alpha\beta$ gleich $-F\mu\omega dsvdt$ ist. Für den Gesammtbetrag der Wirkungsgröße der Reibung an allen Querschichten der Flüssigkeit zwischen ab und cd hat man also $-dt\int_{s'}^{s''} F\mu v\omega ds$.

Da die Flüſſigkeit im Allgemeinen als elaſtiſch angenommen wird, ſodaß ſie fähig iſt, unter der Einwirkung von Kräften ihre Dichtigkeit nach einem gewiſſen Geſetze zu ändern; ſo muß, um das Prinzip der lebenden Kräfte hier in Anwendung bringen zu können, auf ſämmtliche innere Kräfte gehörig Rückſicht genommen werden, welche in Folge der elaſtiſchen Beſchaffenheit der ſich bewegenden Maſſe während der Bewegung durch die Zeit dt hervorgerufen werden.

Zu dieſem Ende betrachten wir die in der Richtung der Axe der Röhre gegen eine unendlich dünne Querſchicht ABCD der Flüſſigkeit ſich äußernden Preſſungen und die von denſelben während des Zeitelementes dt hervorgebrachten Wirkungen.

Wäre die Verbindung der Maſſentheilchen der Flüſſigkeit untereinander oder die Dichtigkeit von der Zeit t oder auch von dem Drucke p, welcher ſelbſt eine Funktion von t iſt, unabhängig; ſo würde auf die Wirkung jener inneren Preſſungen weiter keine Rückſicht genommen zu werden brauchen, weil alsdann die wirkliche Bewegung der Schicht ABCD während des Zeitelementes dt, bei welcher dieſelbe in die Lage CDEF kommt, als eine virtuelle Bewegung angeſehen werden könnte, und da Dies von der geſammten Flüſſigkeit gilt, es genügen würde, bei der Bewegung der ganzen Maſſe nur die Wirkungsgrößen der obigen äußerlich angebrachten Kräfte zu betrachten. Hiervon überzeugt man ſich, wenn man beachtet, daß die Preſſung gegen die vordere Fläche $AB=\omega$ der Schicht ABCD gleich ωp iſt. Dieſe Fläche AB rückt in der Zeit dt um die Länge $AC=vdt=ds$ vorwärts in die Lage CD, ſodaß die Wirkungsgröße der auf AB angebrachten Preſſung $=\omega pvdt$ iſt. Die entſprechende Wirkungsgröße der auf die Fläche CD angebrachten Preſſung würde hiernach $\omega pvdt+\frac{d(\omega pvdt)}{ds}ds=\omega pvdt+\frac{d(\omega pv)}{ds}ds\,dt$ ſein. Wenn man die Fläche CD als hintere Fläche der Schicht ABCD anſieht, und beachtet, daß der Angriffspunkt der in dieſer Fläche gegen die Schicht ABCD wirkenden Preſſung ſich in entgegengeſetzter Richtung der Wirkung dieſer Kraft bewegt; ſo hat man für die Wirkungsgröße derſelben

$-\left[\omega p v\,dt + \frac{d(\omega p v)}{ds}\,ds\,dt\right]$ und demnach für die Summe der Wirkungsgrößen der beiden gegen AB und CD wirkenden Pressungen $-\frac{d(\omega p v)}{ds}\,ds\,dt$. Nimmt man die Summe aller dieser Größen für sämmtliche Schichten der Flüssigkeit zwischen der obersten und untersten Endfläche O′ und O″; so kommt für die Wirkungsgröße aller inneren Pressungen während der Zeit dt

$$-dt\int_{s'}^{s''}\frac{d(\omega p v)}{ds}\,ds.$$

Berücksichtigt man, daß für die oberste Endfläche O′ oder für $s=s'$ die Größe $\omega p v = O'p'v'$ und für die unterste Endfläche O″ oder für $s=s''$ diese Größe $= O''p''v''$ ist; so erhält man

$$-dt\int_{s'}^{s''}\frac{d(\omega p v)}{ds}\,ds = -dt\int_{O'p'v'}^{O''p''v''} d(\omega p v) = (O'p'v' - O''p''v'')\,dt,$$

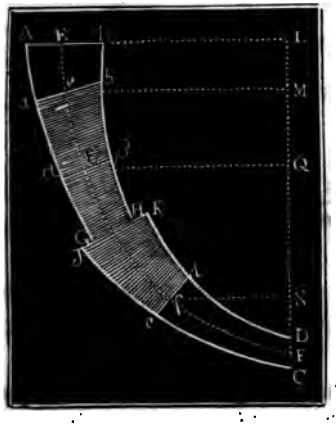
ein Ausdruck, welcher mit der Wirkungsgröße der $ad\,1$ gedachten beiden Pressungen gegen die Endflächen der Flüssigkeit genau übereinstimmt.

Jetzt ist die Flüssigkeit aber im Allgemeinen elastisch, die Dichtigkeit μ derselben variirt mit der Zeit, sowie Dies der Druck p thut, und demnach ändert sich auch die gegenseitige Verbindung der Theilchen mit der Zeit. Soll also die wirkliche Bewegung der Schicht ABCD während der Zeit dt als eine virtuelle angesehen werden; so hat man noch die Arbeit der elastischen Kräfte einzuführen, unter deren Wirkung jene wirkliche Bewegung als eine virtuelle möglich ist.

Die der elementaren Masse ABCD innewohnende Elastizität kann man sich durch eine Feder versinnlichen, welche mit der Kraft ωp von innen nach außen gegen die Endflächen AB und CD drückt. Ändert sich nun die Dichtigkeit μ jener Schicht in der Zeit dt auf $\mu + d\mu$, während die Stärke $AC = ds$ derselben in $ds + z$ übergeht, sodaß die Angriffspunkte jener Elastizitäts-

kraft um die Länge z weiter auseinander rücken; so verrichtet jene Kraft dabei eine Wirkungsgröße $= \omega p z$. Die Größe z bestimmt sich aber aus der Bedingung, daß die Masse $\mu \omega ds$ der Schicht ABCD am Ende der Zeit t gleich der Masse $(\mu + d\mu)$ $\omega(ds + z)$ derselben Schicht am Ende der Zeit $t + dt$ sei, und Dies gibt $z = -\frac{d\mu\, ds}{\mu + d\mu}$, oder da im Nenner dieses Ausdruckes $d\mu$ gegen μ verschwindet, $-\frac{d\mu\, ds}{\mu}$. Hiernach hat man endlich für die Arbeit der Elastizitätskraft in der Schicht ABCD während der Zeit dt den Ausdruck

$$-\frac{\omega p}{\mu} d\mu\, ds.$$



Die Dichtigkeit μ, welche am Ende der Zeit t im Querschnitte $\alpha\beta$ herrscht, ist gleichzeitig eine Funktion der Zeit t und des Axenbogens s. Unter dem Inkremente $d\mu$ dieser Dichtigkeit ist nun derjenige Zuwachs zu verstehen, welchen dieselbe im Zeitelemente dt während der Fortrückung der Schicht $\alpha\beta$ um den Raum ds erleidet. Demnach ist für $d\mu$ das vollständige Differenzial der Funktion μ in Beziehung zur Zeit t zu nehmen, welches, da s selbst eine Funktion von t ist, durch

$$d\mu = \frac{d\mu}{dt} dt + \frac{d\mu}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt$$

dargestellt wird.

Der obige Ausdruck wird hierdurch

$$-\frac{\omega\mu}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} \cdot dt\, ds - \frac{\omega p}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt\, ds,$$

oder da offenbar $\frac{ds}{dt}$ gleich der Geschwindigkeit v der Theilchen der Schicht $\alpha\beta$ ist,

$$-\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}dt\,ds-\frac{\omega p v}{\mu}\frac{d\mu}{ds}dt\,ds.$$

Die Summe der Wirkungsgrößen aller ähnlichen elastischen Kräfte zwischen den Endschichten ab und cd der Flüssigkeit während der Zeit dt ist also

$$-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}ds-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p v}{\mu}\frac{d\mu}{ds}ds.$$

Nach dem Vorstehenden hat man für die Summe der Wirkungsgrößen oder der Arbeiten aller auf die in Bewegung begriffene Flüssigkeit angebrachten Kräfte während der Zeit dt den Ausdruck

$$\Omega' p' v' dt-\Omega'' p'' v'' dt-dt\Sigma R u+dt\int_{s'}^{s''}f\mu v\omega\cos\vartheta\,.\,ds$$

$$-dt\int_{s'}^{s''}F\mu v\omega ds-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}ds-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p v}{\mu}\frac{d\mu}{ds}ds,$$

und diese Summe muß gleich der halben lebenden Kräfte sein, welche alle Theile der Flüssigkeit in derselben Zeit dt gewonnen haben.

Zur Bestimmung dieser gewonnenen lebenden Kräfte hat man zuvörderst für die lebende Kraft der Schicht $\alpha\beta$ am Ende der Zeit t den Ausdruck $\mu\omega ds.v^2$. Während der Zeit dt ändert sich die Masse $\mu\omega ds$ dieser Schicht nicht; die Geschwindigkeit v derselben geht aber in $v+dv$ über, und man hat für die lebende Kraft derselben am Ende der Zeit $t+dt$ den Ausdruck $\mu\omega ds(v+dv)^2=\mu\omega ds.v^2+2\mu\omega ds.v dv$ wobei das in dv^2 multiplizirte Glied gegen das vorhergehende vernachlässigt ist; demnach für die während der Zeit dt gewonnene lebende Kraft $2\mu\omega ds v dv$. Hierbei hat man zu beachten, daß v gleichzeitig eine Funktion der Zeit t und des Arcnbogens s ist, daß dv im

verstehenden Ausdrucke die ganze Variation darstellt, welche v während der Zeit dt und beim Fortrücken der Schicht $a\beta$ um die Länge ds erleidet, daß also für dv die Größe

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}dt = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{ds}v\,dt$$

substituirt werden muß. Dies ergibt für die in Rede stehende von der Schicht $a\beta$ in der Zeit dt gewonnene lebende Kraft

$$2\mu\omega v\frac{dv}{ds}dt\,ds + 2\mu\omega v^2\frac{dv}{ds}dt\,ds,$$

und demnach für die von der ganzen Flüssigkeit während derselben Zeit gewonnene lebende Kraft

$$2dt\int_{s'}^{s''}\mu\omega v\frac{dv}{dt}ds + 2dt\int_{s'}^{s''}\mu\omega v^2\frac{dv}{ds}ds.$$

Zu dieser lebenden Kraft, welche die Theile der Flüssigkeit während des Zeitelementes dt bei der stetig variirenden Geschwindigkeit der einzelnen Querschichten gewinnen, muß offenbar noch die lebende Kraft addirt werden, welche das System durch die plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit der von GH in JK während der Zeit dt übergehenden Schichten, wie in Folge eines Stoßes, verliert, da dieser Verlust an lebender Kraft ebenfalls durch die Wirkung der auf die Flüssigkeit angebrachten Kräfte ersetzt werden muß.

Die durch den Querschnitt GH tretenden Schichten vereinigen sich, indem sie gegen die unterhalb JK befindliche flüssige Masse stoßen, dergestalt mit der Letzteren, daß Beide mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit weitereilen. Dies ist der Vorgang, welcher beim Stoße unelastischer Körper stattfindet, und wenn auch die Flüssigkeit im Allgemeinen als elastisch vorausgesetzt ist; so leuchtet doch ein, daß der bei GH stattfindende Stoß nach denselben Prinzipien beurtheilt werden muß, welche bei dem Stoße unelastischer Körper zur Anwendung kommen und den Carnotschen Lehrsatz (§. 54) ausmachen, da diese Prinzipien, abgesehen von aller übrigen physischen Konstitution der Körper, darauf basirt

oder da offenbar $\frac{ds}{dt}$ gleich der Geschwindigkeit v der Theilchen der Schicht $\alpha\beta$ ist,

$$-\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}dt\,ds-\frac{\omega p v}{\mu}\frac{d\mu}{ds}dt\,ds.$$

Die Summe der Wirkungsgrößen aller ähnlichen elastischen Kräfte zwischen den Endschichten ab und cd der Flüssigkeit während der Zeit dt ist also

$$-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}ds-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p v}{\mu}\frac{d\mu}{ds}ds.$$

Nach dem Vorstehenden hat man für die Summe der Wirkungsgrößen oder der Arbeiten aller auf die in Bewegung begriffene Flüssigkeit angebrachten Kräfte während der Zeit dt den Ausdruck

$$O'p'v'dt-O''p''v''dt-dt\Sigma Ru+dt\int_{s'}^{s''}f\mu v\omega\cos\vartheta\,.\,ds$$

$$-dt\int_{s'}^{s''}F\mu v\omega ds-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}ds-dt\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p v}{\mu}\frac{d\mu}{ds}ds,$$

und diese Summe muß gleich der Hälfte der lebenden Kräfte sein, welche alle Theile der Flüssigkeit in derselben Zeit dt gewonnen haben.

Zur Bestimmung dieser gewonnenen lebenden Kräfte hat man zuvörderst für die lebende Kraft der Schicht $\alpha\beta$ am Ende der Zeit t den Ausdruck $\mu\omega ds.v^2$. Während der Zeit dt ändert sich die Masse $\mu\omega ds$ dieser Schicht nicht; die Geschwindigkeit v derselben geht aber in $v+dv$ über, und man hat für die lebende Kraft derselben am Ende der Zeit $t+dt$ den Ausdruck $\mu\omega ds(v+dv)^2=\mu\omega ds\,.\,v^2+2\mu\omega ds.vdv$ wobei das in dv^2 multiplizirte Glied gegen das vorhergehende vernachlässigt ist; demnach für die während der Zeit dt gewonnene lebende Kraft $2\mu\omega ds\,v\,dv$. Hierbei hat man zu beachten, daß v gleichzeitig eine Funktion der Zeit t und des Arcnbogens s ist, daß dv im

verstehenden Ausdrucke die ganze Variation darstellt, welche v während der Zeit dt und beim Fortrücken der Schicht $\alpha\beta$ um die Länge ds erleidet, daß also für dv die Größe

$$dv = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}dt = \frac{dv}{dt}dt + \frac{dv}{ds}v\,dt$$

substituirt werden muß. Dies ergibt für die in Rede stehende von der Schicht $\alpha\beta$ in der Zeit dt gewonnene lebende Kraft

$$2\mu\omega v\frac{dv}{ds}dt\,ds + 2\mu\omega v^2\frac{dv}{ds}dt\,ds,$$

und demnach für die von der ganzen Flüssigkeit während derselben Zeit gewonnene lebende Kraft

$$2dt\int_{s'}^{s''}\mu\omega v\frac{dv}{dt}ds + 2dt\int_{s'}^{s''}\mu\omega v^2\frac{dv}{ds}ds.$$

Zu dieser lebenden Kraft, welche die Theile der Flüssigkeit während des Zeitelementes dt bei der stetig variirenden Geschwindigkeit der einzelnen Querschichten gewinnen, muß offenbar noch die lebende Kraft addirt werden, welche das System durch die plötzliche Veränderung der Geschwindigkeit der von GH in JK während der Zeit dt übergehenden Schichten, wie in Folge eines Stoßes, verliert, da dieser Verlust an lebender Kraft ebenfalls durch die Wirkung der auf die Flüssigkeit angebrachten Kräfte ersetzt werden muß.

Die durch den Querschnitt GH tretenden Schichten vereinigen sich, indem sie gegen die unterhalb JK befindliche flüssige Masse stoßen, dergestalt mit der Letzteren, daß Beide mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit weitereilen. Dies ist der Vorgang, welcher beim Stoße unelastischer Körper stattfindet, und wenn auch die Flüssigkeit im Allgemeinen als elastisch vorausgesetzt ist; so leuchtet doch ein, daß der bei GH stattfindende Stoß nach denselben Prinzipien beurtheilt werden muß, welche bei dem Stoße unelastischer Körper zur Anwendung kommen und den Carnot'schen Lehrsatz (§. 54) ausmachen, da diese Prinzipien, abgesehen von aller übrigen physischen Konstitution der Körper, darauf basirt

sind, daß nach Vollendung des Stoßes zwischen den sich treffenden Körpern eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit in der Richtung des Stoßes obwalte.

Wäre nun vorläufig m die unendlich kleine flüssige Masse, welche in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit v_1 durch den Querschnitt GH tritt und sofort die Geschwindigkeit v_2 annimmt, wäre ferner M die Masse der gesammten unterhalb JK befindlichen Flüssigkeit JKdc, U_1 deren mittlere Geschwindigkeit vor dem Stoße und U_2 deren Geschwindigkeit nach dem Stoße; so würde die lebende Kraft des aus m und M bestehenden Systemes vor dem Stoße $mv_1^2 + MU_1^2$ und nach dem Stoße $mv_2^2 + MU_2^2$, der Verlust an lebender Kraft in Folge des Stoßes würde also $mv_1^2 + MU_1^2 - (mv_2^2 + MU_2^2)$ sein. Da aber die Masse m während des Stoßes die Geschwindigkeit $v_1 - v_2$ und die Masse M die Geschwindigkeit $U_1 - U_2$ in der Richtung des Stoßes verliert; so folgt aus dem Carnotschen Lehrsatze, daß der obige Verlust an lebender Kraft, welchen das ganze System in Folge des Stoßes erleidet,

$$m(v_1 - v_2)^2 + M(U_1 - U_2)^2$$

ist.

Der Voraussetzung gemäß geht aber nicht bloß die Masse m nach dem Stoße eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit mit der Masse M ein, sondern die letztere behält auch nach dem Stoße dieselbe Geschwindigkeit bei, welche sie vor dem Stoße besaß (wenigstens soweit Dies von der Wirkung des Stoßes und nicht von den übrigen stetig auf die Masse M wirkenden Kräften abhängt) ein Umstand, der sich immer ereignet, wenn eine gewisse Masse gegen eine unendlich größere stößt. Demnach hat man $U_1 = U_2$, und der ganze Verlust an lebender Kraft reduzirt sich auf

$$m(v_1 - v_2)^2,$$

nämlich auf die lebende Kraft, welche der Geschwindigkeitsveränderung $v_1 - v_2$ der sehr kleinen Masse m entspricht.

Die Masse m der während der Zeit dt durch den Querschnitt GH gehende Flüssigkeit ist nun $\mu_1 \omega_1 v_1 dt$, da $v_1 dt$ die Dicke des mit der Geschwindigkeit v_1 aus dem Querschnitte ω_1 tretenden Volums ist. Hieraus und aus dem Vorstehenden folgt

für den in Rede stehenden durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung bei GH hervorgebrachten Verlust an lebender Kraft

$$\mu_1 \omega_1 v_1 dt (v_1 - v_2)^2.$$

Kämen dergleichen Stellen, wie bei $\overline{GH}$, JK, mehrere in der Röhre vor; so würde die Summe der durch den plötzlichen Wechsel der Geschwindigkeit an diesen Stellen verursachten Verluste an lebender Kraft allgemein durch

$$dt \Sigma \mu_1 \omega_1 v_1 (v_1 - v_2)^2$$

darzustellen sein.

Weiter unten in §. 97 wird man sehen, warum im Obigen besonders angenommen ist, daß der nächstfolgende Querschnitt JK größer sei, als der vorhergehende GH an denjenigen Stellen, wo sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit plötzlich um eine endliche Größe ändert. Man wird dort sehen, wie sich bei Flüssigkeiten der Fall, wo $JK < GH$ ist, immer auf den eben betrachteten zurückführen läßt.

Im Übrigen ist leicht zu erkennen, daß wenn die Flüssigkeit an irgend einer Stelle der Röhre plötzlich gezwungen würde, aus einem größeren Querschnitte in einen kleineren zu treten, womit in der Regel eine plötzliche Zunahme an Geschwindigkeit verbunden ist, hierdurch ein Gewinn an lebender Kraft entstände, welcher nach §. 54 Nr. 4, wie bei Explosion, durch

$$\mu \omega_1 v_1 dt (v_2 - v_1)^2$$

dargestellt, also dem früheren Verluste an lebender Kraft gleich sein würde.

Ein solcher Gewinn an lebender Kraft müßte offenbar ebenso, wie der vorhin betrachtete Verlust behandelt und mit positivem Zeichen den Gliedern zugefügt werden, welche der obigen Summe der Wirkungsgrößen der auf die Flüssigkeit angebrachten Kräfte gleich sein müssen. Denn es gehört offenbar eine gleiche Wirkung der bewegenden Kraft dazu, um einer bestimmten Masse vorher und allmählig so viel Geschwindigkeit mitzutheilen, daß dieselbe im Stande ist, durch den Stoß plötzlich eine gewisse Geschwindigkeit oder lebende Kraft zu verlieren, wie dazu ge-

hört, um derſelben Maſſe augenblicklich, wie durch Exploſion, eine gleiche Geſchwindigkeit oder lebende Kraft zu ertheilen.

Vergleichsweiſe könnte man z. B. eine ſchwere unelaſtiſche Kugel vertikal auf eine mit einer beliebigen gleichförmigen Geſchwindigkeit abwärts ſich bewegende ungemein große Maſſe herabfallen laſſen. Jene Kugel würde beim Zuſammentreffen mit dieſer Maſſe die Geſchwindigkeit der letzteren augenblicklich annehmen und dabei eine gewiſſe lebende Kraft verlieren, welche ihr der freie Fall oder die Wirkung der Schwere vorher erſt liefern mußte. Denkt man ſich nun unter der Kugel einen Theil eines größeren Syſtemes von Körpern, auf welche die Schwere gleichfalls wirkt und allmählige Veränderungen hervorbringt; ſo kann man ſich unter jener Kugel die in der Zeit dt durch den engeren Querſchnitt GH in den weiteren Querſchnitt JK übergehende flüſſige Maſſe vorſtellen, während die ganze in der Röhre befindliche Flüſſigkeit durch das obenerwähnte geſammte Syſtem von Körpern dargeſtellt wird.

Ließe man dagegen eine ungemein große Maſſe ſich bewegen und gegen den Einen Arm eines Hebels ſtoßen, auf deſſen anderen und längeren Arm eine ſehr kleine Kugel gelegt wäre; ſo würde die große Maſſe ihre Geſchwindigkeit beim Stoße nahezu beibehalten; die Kugel würde jedoch mit einer von der Länge der Hebelarme abhängenden Geſchwindigkeit in die Höhe geſchleudert werden. Wäre die letztere Geſchwindigkeit gleich der vorhin betrachteten, womit die Kugel herabfiel; ſo würde auch die auf die große Maſſe angebrachte bewegende Kraft um eine der früheren Wirkung der Schwere gleiche Größe geſchwächt ſein und müßte dieſe Schwächung durch die Schwere wieder erſetzt bekommen, wenn ſie ihre Geſchwindigkeit trotz des Stoßes genau bewahren ſollte. Wenn man ſich die große Maſſe als Theil eines Syſtemes von Körpern denkt, auf welche noch andere Kräfte, namentlich die Schwere wirken; ſo vertritt die Kugel in der zuletzt betrachteten Eigenſchaft die Stelle einer flüſſigen Querſchicht in einer Röhre, welche während der Zeit dt aus einem größeren Querſchnitte in einen kleineren übergehen ſoll, und die größere eben erwähnte Maſſe wird durch die oberhalb des größten Querſchnittes befindliche Flüſſigkeit repräſentirt.

Nach dem Vorſtehenden iſt alſo die geſammte lebende Kraft,

welche die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte während der Zeit dt hervorbringen müssen,

$$2dt\int_{s'}^{s''}\mu\omega v\frac{dv}{dt}ds+2dt\int_{s'}^{s''}\mu\omega v^2\frac{dv}{ds}ds+dt\Sigma\mu_1\omega_1v_1(v_1-v_2)^2.$$

Setzt man nach dem Prinzipe der lebenden Kräfte die Hälfte dieser Größe gleich der vorhin entwickelten Arbeit sämmtlicher auf die Flüssigkeit während der Zeit dt wirkender Kräfte; so erhält man nach vorhergängiger Division mit dt folgende allgemeine Gleichung

$$\left\{\begin{array}{l} O'p'v'-O''p''v''-\Sigma Ru+\int_{s'}^{s''}f\mu v\omega\cos\vartheta\,.\,ds \\ \\ -\int_{s'}^{s''}F\mu v\omega ds-\int_{s'}^{s''}\frac{\omega p}{\mu}\frac{d\mu}{dt}ds-\int_{s'}^{s''}\frac{\omega pv}{\mu}\frac{d\mu}{ds}ds \end{array}\right\}$$

$$=\int_{s'}^{s''}\mu\omega v\frac{dv}{dt}ds+\int_{s'}^{s''}\mu\omega v^2\frac{dv}{ds}ds+\tfrac{1}{2}\Sigma\mu_1\omega_1v_1(v_1-v_2)^2. \quad \ldots\ldots (234)$$

Mit der vorstehenden Gleichung ist noch eine zweite zu verbinden, welche ausdrückt, daß die Flüssigkeit zu allen Zeiten eine zusammenhängende, die Gefäßwände überall erfüllende stetige Masse bilde. Man erhält diese Gleichung, wenn man den Raum betrachtet, welchen irgend ein Element der Röhre vom Querschnitte ω und von der Stärke ds enthält, und ausdrückt, daß die in diesem Elemente am Ende der Zeit $t+dt$ enthaltene Masse gleich der sei, welche sich am Ende der Zeit t in demselben befand, plus der, welche während der Zeit dt in dasselbe eingetreten, minus der, welche während derselben Zeit dt aus demselben herausgetreten ist.

Am Ende der Zeit t ist nun die Masse der Flüssigkeit, welche sich im Raume ωds befindet, gleich $\mu\omega ds$. Am Ende der

Zeit $t+dt$ ist diese Masse gleich $\left(\mu+\frac{d\mu}{dt}dt\right)\omega ds=\mu\omega ds+\omega\frac{d\mu}{dt}dtds$, da sich während der Zeit dt die Dichtigkeit μ an jener Stelle um $\frac{d\mu}{dt}dt$ ändert. Während der Zeit dt tritt nun aber in den obigen Raum die Masse $\mu\omega v dt$ ein, und durch die entgegengesetzte Seite tritt gleichzeitig die Masse $\left(\mu\omega v+\frac{d(\mu\omega v)}{ds}ds\right)dt$ $=\mu\omega v dt+\frac{d(\mu\omega v)}{ds}ds\,dt$ aus. Nach dem vorhin ausgesprochenen Satze erhält man also nach zuvoriger Division mit $ds\,dt$ die Gleichung

$$\omega\frac{d\mu}{dt}+\frac{d(\mu\omega v)}{ds}=0, \qquad \ldots\ldots (235)$$

welche man die Gleichung des Zusammenhanges oder der Kontinuität der Flüssigkeit nennt.

Die vorstehenden beiden Gleichungen (234) und (235) bilden die Basis der ganzen Hydraulik. Man kann aus derselben nicht nur die meisten Fälle der Bewegung der Flüssigkeiten, sondern auch fast alle Untersuchungen über die hydraulischen Maschinen ableiten.

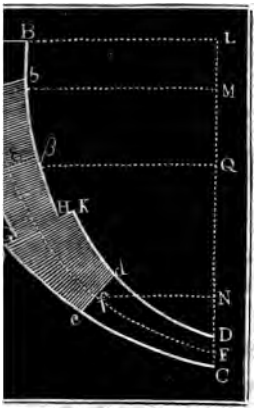
Es wird noch bemerkt, daß die Masse der Flüssigkeit, welche sich während des Zeitraumes T, vom Ende der Zeit t aus gerechnet, durch den Querschnitt $\alpha\beta$ bewegt, offenbar

$$M=\int_t^{t+T}\mu\omega v dt \qquad \ldots\ldots (236)$$

ist.

§. 56. Bestimmung des hydraulischen Druckes einer in einer Röhre sich bewegenden Flüssigkeit in irgend einem Punkte.

Um den Druck p auf die Flächeneinheit zu bestimmen, welcher in irgend einem Querschnitte $\alpha\beta$ der vorhin betrachteten Flüssigkeit am Ende der Zeit t herrscht, ein Druck, welcher bei einer bewegten Flüssigkeit der hydraulische Druck zum Unter-



schiede des im Gleichgewichtszustande herrschenden hydrostatischen Druckes heißt, braucht man offenbar auf den Theil $ab\beta\alpha$ der Flüssigkeit nur dieselben Betrachtungen anzuwenden, welche im vorhergehenden Paragraphe auf die ganze Masse $abdc$ angewandt sind, und man findet, daß hierzu die Gleichung (234) ohne Weiteres dienen kann, wenn man darin resp. ω, p, v, s an die Stelle von O'', p'', v'', s'' setzt. Es versteht sich von selbst, daß in veränderten Gleichung in den Ausdrücken ΣRu und $\omega_1 v_1 (v_1 - v_2)^2$ nur diejenigen Glieder aufgenommen dürfen, welche von Ursachen herrühren, deren Angriffs- zwischen den Flächen ab und $\alpha\beta$ liegen.

n Vorstehenden ist auf die Wirkung der Zentrifugalkraft ücksicht genommen, welche sich auf die Theilchen der Flüs- äußert, sobald Letztere sich in einer gekrümmten Röhre

Diese Kraft hat keinen Einfluß auf die Bewegung ssigkeit, weil sie überall perpendikular gegen die Axe der gerichtet ist und von der festen Röhrenwand aufgenommen Aus diesem Grunde ist alle Arbeit oder Wirkungsgröße trifugalkraft gleich null, und die linke Seite der Glei- 234) wird nicht davon affizirt. Die in Rede stehende

Kraft vermehrt aber den hydraulischen Druck der Flüssigkeit gegen den entgegenstehenden Theil der Gefäßwand um eine Größe, welche folgendermaaßen näherungsweise bestimmt werden kann.

$\alpha\beta$ sei ein Querschnitt der Röhre, ε sein Mittelpunkt, εC die Richtung des Krümmungshalbmessers der Axe der Röhre im Punkte ε, sodaß der Krümmungsmittelpunkt nach der Seite von C hin liegt, und es sei die Tangente mn an den Umfang dieses Quer-

ſchnittes perpendikular auf εC gezogen. Betrachten wir irgend einen Punkt h in dieſem Querſchnitte; ſo leuchtet ein, daß alle derſelben Parallelen hh' mit mn liegenden Punkte von der Zentrifugalkraft gleich ſtark gedrückt werden, indem dieſe Parallele perpendikular auf der Richtung εC jener Kraft ſteht (vergl. die Prinzipien des erſten Abſchnittes). Unterſuchen wir daher den Druck auf die Flächeneinheit im Punkte h', indem wir $gh = hg = y$, den Krümmungshalbmeſſer der Axe der Röhre gleich r ſetzen und die Geſchwindigkeit der Theile der Flüſſigkeit im ganzen Querſchnitte, wie vorhin, gleich v annehmen.

Ein Element, welches in der Richtung der Linie $g'h'$ die Stärke dy und in perpendikularer Richtung zu dieſer Linie den ſehr kleinen Querſchnitt a beſäße, würde, wenn die Dichtigkeit der Flüſſigkeit im Punkte h' gleich μ wäre, die Maſſe μady beſitzen, und nach bekannten Geſetzen der Mechanik würde der Druck, welchen die Zentrifugalkraft auf dieſe Maſſe in der Richtung $g'h'$ ausübt, gleich $\mu ady\frac{v^2}{r}$, alſo der Druck, welchen dieſelbe Kraft auf eine Maſſe der Flüſſigkeit von der Stärke dy und von einem Querſchnitte gleich der Flächeneinheit im Punkte h' ausübt, gleich $\mu dy\frac{v^2}{r}$ ſein. Bezeichnen wir den hydrauliſchen Druck auf die Flächeneinheit, welcher im Punkte h' oder überhaupt im Abſtande y von der Linie mn herrſcht, mit q, und den im Abſtande $y+dy$ von derſelben Linie herrſchenden Druck mit $q+dq$, ſodaß dq den Zuwachs darſtellt, welchen jener Druck in Folge der Zentrifugalkraft des Elementes von der Stärke dy erleidet; ſo hat man

$$dq = \mu\frac{v^2}{r}dy \qquad \ldots\ldots (237)$$

Für unpreßbare Flüſſigkeiten hat die Dichtigkeit μ in allen Punkten denſelben konſtanten Werth. Bei ſolchen Flüſſigkeiten kann man auch annehmen, daß der Druck q im Punkte g' oder für $y=o$ gleich dem Drucke p ſei, welcher ſich aus dem vorigen Paragraphe für den Querſchnitt $\alpha\beta$ ergeben würde, wenn keine Zentrifugalkraft auf die Flüſſigkeit einwirkte. Integrirt man daher unter der Vorausſetzung ſolcher Flüſſigkeiten die vorſte-

Gleichung zwischen den Gränzen o und y für y und den enden Gränzen p und q für q: so erhält man

$$q = p + \mu \frac{v^2}{r} y \qquad \ldots . (238)$$

elastischen Flüssigkeiten, wo die Dichtigkeit μ allgemein ktion des Druckes q ist, hat man

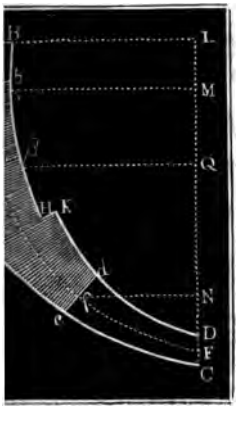
$$\frac{dq}{\mu} = \frac{v^2}{r} dy.$$

der Integration dieses Ausdruckes könnte man von der e ausgehen, daß der Druck q und die Dichtigkeit μ in te des Querschnittes $\alpha\beta$, also im Punkte ε resp. gleich ucke p und der Dichtigkeit μ wären, welche sich aus dem Paragraphe für den ganzen Querschnitt bei mangelnder galkraft ergeben würde. Demnach hätte man für derar- ssigkeiten, wenn man $g'\varepsilon = y_1$ setzte,

$$\int_p^q \frac{dq}{\mu} = \frac{v^2}{r} (y - y_1) \qquad \ldots . (239)$$

ie Bewegung der schweren unpreßbaren Flüssigkeiten.

57. Transformation der allgemeinen Gleichungen (234) und (235) für den Fall, daß die in einer engen Röhre sich bewegende Flüssigkeit schwer und unpreßbar sei.



Unter Beibehaltung der in §. 55 eingeführten Bezeichnungen, auf welche wir bei den späteren Untersuchungen im Allgemeinen Bezug nehmen werden, sei hier noch

Ω die Fläche eines bestimmten Querschnittes der Röhre, z. B. des untersten CD,

z der vertikale Abstand LQ des

Mittelpunktes s des Querschnittes $\alpha\beta$ von dem festen Punkte E der Axe der Röhre,

z', z'' die vertikalen Abstände LM und LN der Mittelpunkte der äußeren Endflächen ab und cd der Flüssigkeit von dem Punkte E am Ende der Zeit t,

V die Geschwindigkeit, welche in dem bestimmten Querschnitte Ω stattfinden müßte, damit durch diesen Querschnitt dieselbe Quantität der Flüssigkeit gehe, welche in derselben Zeit mit der Geschwindigkeit v durch den Querschnitt ω geht,

$g = 31{,}2644$ Fuß rheinl. die Beschleunigung der Schwere in der Sekunde,

$w = \mu g$ das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit.

In den Gleichungen des §s 55 wird nun zuvörderst die Dichtigkeit μ eine für alle Punkte der Flüssigkeit und für alle Zeiten konstante Größe, und man hat

$$\mu = \frac{w}{g},$$

ferner

$$\frac{d\mu}{dt} = o \text{ und } \frac{d\mu}{ds} = o.$$

Außerdem ist für die stetige auf alle Massenelemente wirkende Kraft der Schwere

$$f = g,$$

und da diese Kraft in vertikaler Richtung abwärts wirkt; so hat man

$$\cos\vartheta = \frac{dz}{ds}.$$

Hierdurch reduzirt sich die Gleichung (234) auf

$$O'p'v' - O''p''v'' - \Sigma Ru + w\int_{s'}^{s''} v\omega\frac{dz}{ds}ds - \frac{w}{g}\int_{s'}^{s''} Fv\omega ds$$

$$= \frac{w}{g}\int_{s'}^{s''} \omega v\frac{dv}{dt}ds + \frac{w}{g}\int_{s'}^{s''} \omega v^2\frac{dv}{ds}ds + \frac{w}{2g}\Sigma\omega_1 v_1(v_1 - v_1)^2$$

Die Gleichung (235) wird

$$\frac{w}{g}\frac{d(\omega v)}{ds}=o,\ \text{also auch}$$

$$d(\omega v)=o\ \text{oder}$$

$$\omega v=\text{const.}$$

Da nun für den untersten Querschnitt Ω der Röhre $\omega=\Omega$ und $v=V$ ist; so hat man

$$\omega v=\Omega V \qquad \ldots\ldots (240)$$

Dividirt man daher die obige Gleichung durch $\omega v=\Omega V=\omega' v'=O'' v''=\omega_1 v_1=\omega_2 v_2$, bemerkt auch dabei, daß in dem Ausdrucke $v=\frac{\Omega V}{\omega}$ nur die Größe V von der Zeit und nur die Größe ω von der Bogenlänge s abhängig, daß also

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\Omega}{\omega}\frac{dV}{dt}\ \text{und}\ \frac{dv}{ds}=-\frac{\Omega V}{\omega^2}\frac{d\omega}{ds}$$

ist; so erhält man

$$p'-p''-\frac{1}{\Omega V}\Sigma Ru+w\int_{s'}^{s''}\frac{dz}{ds}ds-\frac{w}{g}\int_{s'}^{s''}F ds$$

$$=\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{\omega}-\frac{w}{g}\Omega^2V^2\int_{s'}^{s''}\frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{ds}ds+\frac{w}{2g}\Omega^2V^2\Sigma\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2.$$

Da offenbar

$$\int_{s'}^{s''}\frac{dz}{ds}ds=\int_{z'}^{z''}dz=(z''-z')$$

und

$$\int_{s'}^{s''}\frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{ds}ds=\int_{O'}^{O''}\frac{d\omega}{\omega^3}=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{O''^2}-\frac{1}{O'^2}\right)$$

; so wird die vorstehende Gleichung

$$p'-p''-\frac{1}{\Omega V}\Sigma R u+w(z''-z')-\frac{w}{g}\int_{s'}^{s''}F\,ds$$

$$=\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{\omega}+\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{O''^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\frac{w}{2g}V^2\Sigma\left(\frac{\Omega}{w_1}-\frac{\Omega}{w_2}\right)^2 \quad \ldots\ldots (241)$$

Beachtet man nun, daß $ds=v\,dt$ und auch $ds'=v'dt$, alſo $v'=\frac{ds'}{dt}$, daß ferner nach Gl. (240) $O'v'=\Omega V$ iſt; ſo hat man, wenn man hierin für v' den vorhergehenden Werth ſubſtituirt,

$$O'ds'=\Omega V\,dt \qquad \ldots\ldots (242)$$

Verbindet man dieſe Gleichung mit der Gl. (241); ſo wird man im Stande ſein, die Bewegung der Flüſſigkeit genau zu beſtimmen. Denn wenn die Figur der Röhre bekannt iſt; ſo ſind die Größen z', z'', s'', $\int_{s'}^{s''}F\,ds$, $\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{\omega}$, O', O'' Funktionen von s'. Die Gleichung (241) ergibt alſo V als Funktion von s'. Eine Subſtitution dieſes Werthes von V in Gleichung (242) ergibt alsdann die Größe s' als Funktion der Zeit t.

Statt der Gleichung (242) würde man auch die Gleichung

$$O''ds''=\Omega V dt \qquad \ldots\ldots (242^a)$$

ſetzen können, indem alsdann Gl. (241) als eine Funktion von V und s'' anzuſehen wäre.

Die Maſſe M der Flüſſigkeit, welche ſich in der Zeit T, vom Ende der Zeit t aus gerechnet, durch irgend einen Querſchnitt der Röhre bewegt, würde nach Gl. (236), da $\mu\omega v=\frac{w}{g}\Omega V$,

$$M=\frac{w}{g}\Omega\int_{t}^{t+T}V\,dt$$

ſein.

Bezeichnet man das Volum dieſer Maſſe mit Q; ſo hat man offenbar

$$Q = \Omega \int_{t}^{t+T} V\,dt \qquad \ldots\ldots (242^b)$$

Um den hydraulischen Druck p zu bestimmen, welcher in irgend einem Querschnitte ω herrscht, hat man nach §. 56 in Gleichung (241) offenbar nur p, ω, s, z an die Stelle von p'', O'', s'', z'' zu substituiren, und dieselbe alsdann mit den früheren Gleichungen (241) und (242) in Verbindung zu bringen.

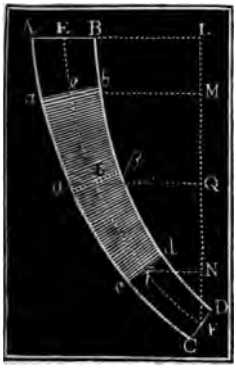
Wenn die Bewegung der gegebenen flüssigen Masse von der Art wäre, daß sich die Geschwindigkeit v in irgend einem Querschnitte ω der Röhre, oder die Geschwindigkeit V in einem bestimmten Querschnitte Ω mit der Zeit t nicht mehr änderte, sodaß die Bewegung der Flüssigkeit einen gewissen Beharrungszustand angenommen hätte; so würde man in obiger Gleichung (241) und in den daraus abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

zu setzen haben, wodurch sich dieselben etwas vereinfachen würden.

Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einer Röhre, deren Querschnitte sich nur allmählig ändern.

§. 58. Allgemeine Gleichungen für diesen Fall, wenn sich eine bestimmte Quantität der Flüssigkeit in einer Röhre fortbewegt, ohne aus der Röhre herauszufließen.



Wenn auf die Flüssigkeit nur die Schwere wirkt, wenn die Reibung an den Röhrenwänden vernachlässigt wird, und in der Röhre keine plötzlichen Veränderungen des Querschnittes vorkommen; so vereinfacht sich die Gleichung (241) auf

$$p' - p'' + w(z'' - z') = \frac{w}{g}\Omega \frac{dV}{dt} \int_{s'}^{s''} \frac{ds}{\omega} + \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} \right) \ldots (243)$$

Mit dieser Gleichung ist die folgende

$$\Omega' ds' = \mathfrak{Q} V dt \qquad \ldots\ldots (244)$$

oder die Gleichung

$$\Omega'' ds'' = \mathfrak{Q} V dt \qquad \ldots\ldots (244^a)$$

zu verbinden (vergl. §. 57).

Zur Bestimmung des im Querschnitte ω stattfindenden Dr p hat man die Gleichung

$$p' - p + w(z - z') = \frac{w}{g} \mathfrak{Q} \frac{dV}{dt} \int_{s'}^{s} \frac{ds}{\omega} + \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\mathfrak{Q}^2}{\omega^2} - \frac{\mathfrak{Q}^2}{\Omega'^2} \right) \ldots\ldots (245)$$

Setzt man der Kürze halber

$$\left.\begin{aligned} \int_{s'}^{s} \frac{ds}{\omega} &= N, \\ \int_{s'}^{s''} \frac{ds}{\omega} &= N'', \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (246)$$

und eliminirt die Größe $\frac{dV}{dt}$ zwischen den Gleichungen (245) und (245); so erhält man für den Druck p

$$p = p' - (p' - p'') \frac{N}{N''}$$

$$+ w \left[(z - z') - (z'' - z') \frac{N}{N''} \right] - \frac{w V^2}{2g} \left[\frac{\mathfrak{Q}^2}{\omega^2} - \frac{\mathfrak{Q}^2}{\Omega'^2} - \left(\frac{\mathfrak{Q}^2}{\Omega''^2} - \frac{\mathfrak{Q}^2}{\Omega'^2} \right) \right.$$

$\ldots\ldots (247)$

Wenn der auf die Endflächen Ω' und Ω'' sich äußernde durch den einfachen Druck der atmosphärischen Luft hervorgel wird; so hat man $p'' = p' =$ diesem Drucke zu setzen.

§. 59. Fall, wo der Querschnitt der Röhr allen Punkten konstant ist.

Für diesen Fall hat man $\omega = \Omega' = \Omega'' = \Omega$, $N = \frac{s - s'}{\Omega}$, $N'' = \frac{s'' - s'}{\Omega}$, und die Gleichungen (243) und (244) werden

$$p' - p'' + w(z'' - z') = \frac{w}{g}(s'' - s')\frac{dV}{dt},$$

$$ds' = V dt,$$

woraus durch Elimination von dt folgt

$$V dV = \frac{g}{s'' - s'}\left(z'' - z' + \frac{p' - p''}{w}\right) ds' \quad \ldots\ldots (248)$$

$s'' - s'$ ist hier eine konstante Größe, und hängt von dem Volum der Flüssigkeit und von der Größe des Querschnittes der Röhre ab. $z'' - z'$ ist veränderlich und ergibt sich nach der Figur der Röhre als eine Funktion von s', sodaß durch die vorstehende Gleichung die Geschwindigkeit V als Funktion von s' gefunden werden kann.

Für den hydraulischen Druck p der Flüssigkeit in irgend einem Punkte hat man hier nach Gl. (247)

$$p = p' - (p' - p'')\frac{s - s'}{s'' - s'} + w\left[(z - z') - (z'' - z')\frac{s - s'}{s'' - s'}\right] \ldots (249)$$

§. 60. Fall, wo bei konstantem Querschnitte der Röhre die Axe derselben eine gerade Linie ist.

Wenn unter den übrigen Voraussetzungen des vorstehenden Paragraphs die Axe der Röhre eine gerade Linie bildet, welche sich unter dem Winkel φ gegen den Horizont neigt; so wird

$$\frac{z'' - z'}{s'' - s'} \text{ konstant und } = \sin\varphi,$$

also Gleichung (248)

$$V dV = g\left(\sin\varphi + \frac{p' - p''}{w(s'' - s')}\right) ds'.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man den Werth von s', für welchen $V = o$ ist, mit S' bezeichnet, außerdem die konstante Größe $s'' - s' = S$ setzt,

$$V=\sqrt{2g\left(\sin\varphi+\frac{p'-p''}{w\mathrm{S}}\right)(s'-\mathrm{S}')} \qquad \ldots\ldots (250)$$

und für den hydraulischen Druck p erhält man aus Gl. (249), da $(z''-z')\frac{s-s'}{s''-s'}=(s-s')\sin\varphi=z-z'$ ist,

$$p=p'-(p'-p'')\frac{s-s'}{\mathrm{S}} \qquad \ldots\ldots (251)$$

Die Bewegung der Flüssigkeit ist die eines Körpers, welcher der Wirkung einer beschleunigenden Kraft frei nachgibt, die ihm in der Zeiteinheit und in der Richtung der Axe der Röhre eine Geschwindigkeit gleich $g\left(\sin\varphi+\frac{p'-p''}{w\mathrm{S}}\right)$ mittheilt. Der Druck p verändert sich gleichförmig von dem Einen Ende der Flüssigkeitssäule zum anderen.

Wenn $p''=p'$ ist, wodurch

$$V=\sqrt{2g\sin\varphi\,(s'-\mathrm{S}')}=\sqrt{2g(z'-\mathrm{Z}')} \qquad \ldots\ldots (252)$$

und

$$p=p' \qquad \ldots\ldots (253)$$

wird, indem man $s'\sin\varphi=z'$ und $\mathrm{S}'\sin\varphi=\mathrm{Z}'$ setzt; so entspricht die Bewegung der Flüssigkeit der gleitenden Bewegung eines schweren Körpers auf einer Ebene, welche sich, wie die Axe der Röhre, unter dem Winkel φ gegen den Horizont neigt. Der hydraulische Druck ist in diesem Falle in allen Punkten der Flüssigkeit gleich dem atmosphärischen p', welcher sich auf jede der beiden Endflächen der Flüssigkeit äußert.

§. 61. Bewegung einer Flüssigkeit in einer Röhre, wenn der obere Spiegel stets auf konstanter Höhe erhalten wird, und die Flüssigkeit sich in der Röhre fortbewegt, ohne aus derselben herauszufließen.

Wenn der obere Spiegel O' der Flüssigkeit $ABdc$ stets auf derselben Höhe AE gehalten wird, d. h. wenn die bei AB herabsinkenden Schichten sogleich mit derselben Geschwindigkeit durch neue ersetzt werden

während die untere Endfläche *cd* oder O'' der Flüssigkeit in der Röhre fortrückt; so wird O' konstant, und man hat außerdem $s' = o$, $z' = o$.

Hiernach ergibt die Gleichung (243)

$$p' - p'' + wz'' = \frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_o^{s''}\frac{ds}{\omega} + \frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \quad \ldots\ldots (254)$$

und hiermit würde man die Gleichung (244ª) oder

$$O''ds'' = \Omega V dt \qquad \ldots\ldots (255)$$

zu verbinden haben.

Wenn alsdann statt der Gleichungen (246)

$$\left.\begin{aligned}\int_o^{s}\frac{ds}{\omega} &= N,\\ \int_o^{s''}\frac{ds}{\omega} &= N''\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (256)$$

gesetzt wird; so hat man zur Bestimmung des hydraulischen Druckes p der Flüssigkeit im Querschnitte ω statt der Gl. (247)

$$p = p' - (p' - p'')\frac{N}{N''}$$
$$+ w\left(z - \frac{N}{N''}z''\right) - \frac{wV^2}{2g}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} - \left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right)\frac{N}{N''}\right] \quad \ldots\ldots (257)$$

§. 62. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer Röhre, wenn der obere Spiegel auf konstanter Höhe erhalten wird.

Nehmen wir jetzt an, die Flüssigkeit ergieße sich aus dem unteren Querschnitte CD der Röhre, während die oberen Schichten im Spiegel AB so rasch ersetzt werden, wie sie herabsinken, indem sie dabei die jenen Schichten zukommende Geschwindigkeit erhalten; so hat man O' konstant, $O'' = \Omega$, $s' = o$, s''

konstant $=S$, $z'=o$, z'' konstant $=Z$. Hierdurch wird die Gleichung (243)

$$p'-p''+wZ=\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_o^S\frac{ds}{\omega}+\frac{w}{2g}V^2\left(1-\frac{\Omega^2}{O''^2}\right), \quad \ldots\ldots (258)$$

und da sowol $s'=o$, wie $s''=S$ konstant sind; so braucht weder die Gleichung (244), noch die Gleichung (244^a) weiter zu berücksichtigen.

Für den hydraulischen Druck p im Querschnitte ω hat man nach Gl. (247), wenn man

$$\left.\begin{aligned}\int_o^s\frac{ds}{\omega}&=N,\\ \int_o^S\frac{ds}{\omega}&=N''\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (259)$$

setzt,

$$p=p'-(p'-p'')\frac{N}{N''}$$
$$+w\left(z-\frac{N}{N''}Z\right)-\frac{wV^2}{2g}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O''^2}-\left(1-\frac{\Omega^2}{O''^2}\right)\frac{N}{N''}\right] \quad \ldots\ldots (260)$$

Wenn man der Kürze halber die konstanten Größen

$$\left.\begin{aligned}2\Omega\int_o^S\frac{ds}{\omega}&=A,\\ 2g\left(Z+\frac{p'-p''}{w}\right)&=B,\\ -\left(1-\frac{\Omega^2}{O''^2}\right)&=C\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (261)$$

setzt; so folgt aus der Gleichung (258)

$$dt=\frac{A\,dV}{B+CV^2} \quad \ldots\ldots (262)$$

Jetzt hat man bei der Betrachtung des verfließenden Systemes wesentlich folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1) der obere Querschnitt O' der Röhre ist kleiner, als die Ausflußöffnung Ω, und mithin C positiv;
2) diese beiden Querschnitte O' und Ω sind einander gleich, also $C = o$;
3) der obere Querschnitt O' ist größer, als die Ausflußöffnung Ω, folglich C negativ.

§. 63. Fall, wo der obere Querschnitt der Röhre kleiner, als die Ausflußöffnung, oder wo C positiv ist.

Nimmt man in diesem Falle an, daß für $t = o$ auch die Ausflußgeschwindigkeit $V = o$ sei; so ergibt eine Integration der Gleichung (262)

$$t = \frac{A}{\sqrt{BC}} \text{arc.tang.} V\sqrt{\frac{C}{B}},$$

also

$$V = \sqrt{\frac{B}{C}} \text{tang} \frac{t\sqrt{BC}}{A} \qquad \ldots . (263)$$

Die Geschwindigkeit V wächst mit der Zeit t ungemein rasch, und ist unendlich groß, wenn

$$\frac{t\sqrt{BC}}{A} = \frac{\pi}{2} \text{ oder}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \frac{A}{\sqrt{BC}} \qquad \ldots . (264)$$

ist.

Es würde also nicht möglich sein, den Ausfluß einer Flüssigkeit bei konstantem Oberspiegel aus einer Röhre auf die Dauer zu unterhalten, wenn die Ausflußöffnung größer wäre, als die Fläche des oberen Spiegels.

§. 64. Fall, wo der obere Querschnitt der Röhre der Ausflußöffnung gleich, oder wo $C = o$ ist.

Ist auch in diesem Falle $V = o$ für $t = o$; so ergibt die Gleichung (262)

$$t = \frac{A}{B} V \text{ oder}$$

$$V = \frac{B}{A} t = \frac{g\left(Z + \frac{p' - p''}{w}\right)}{\int_o^{\Omega} \frac{ds}{\omega}} t \qquad \ldots\ldots (265)$$

Die Geschwindigkeit wächst in demselben Verhältnisse, wie die Zeit, sodaß es auch in diesem Falle nicht ausführbar sein würde, den stetigen Abfluß der Flüssigkeit unter den gegebenen Bedingungen zu erhalten.

Für $p' = p''$ würde

$$V = \frac{gZ}{\int_o^{\Omega} \frac{ds}{\omega}} t \qquad \ldots\ldots (266)$$

werden. Besäße gleichzeitig die Röhre überall einen konstanten Querschnitt $\omega = \Omega$; so würde

$$V = \frac{gZ}{S} t \qquad \ldots\ldots (267)$$

werden, und wäre die Röhre ein gerader vertikaler Zylinder, für welchen man $S = Z$ hätte; so würde

$$V = gt \qquad \ldots\ldots (268)$$

sein.

§. 65. Fall, wo der obere Querschnitt der Röhre größer, als die Ausflußöffnung, oder wo C negativ ist.

Setzt man auch in diesem Falle, welcher in der Praxis allein vorkommt, $V = o$ für $t = o$; so folgt aus Gl. (262), wenn man $C = 1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}$ annimmt,

$$t = \frac{A}{2\sqrt{BC}} \log \frac{\sqrt{B} + V\sqrt{C}}{\sqrt{B} - V\sqrt{C}},$$

also

$$V = \frac{e^{\frac{2\sqrt{BC}\,t}{A}} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{BC}\,t}{A}} + 1} \cdot \sqrt{\frac{B}{C}}, \qquad \ldots\ldots (269)$$

worin log. einen natürlichen Logarithmus und e die Basis 2,718282 ... des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet. Wollte man den obigen Logarithmus aus den gewöhnlichen Tafeln nehmen; so hätte man denselben noch mit der Zahl 2,302585 zu multipliziren.

Wenn der obere Querschnitt O' bedeutend größer ist, als die Ausflußöffnung Ω; so wächst die Geschwindigkeit V sehr rasch mit der Zeit: aber nach sehr kurzer Zeit ist der Werth von V nicht merklich von der Gränze verschieden, welcher dieser Werth fortwährend zustrebt. Dieser Gränzenwerth von V ist

$$V = \sqrt{\frac{B}{C}} \text{ oder } V = \sqrt{\frac{2g\left(Z + \frac{p' - p''}{w}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}}} \qquad \ldots\ldots (270)$$

Abstrahirt man also von den ersten Augenblicken der Bewegung, welche auf den Moment folgen, wo die Ausflußöffnung Ω geöffnet wurde, und in welchen sich die Geschwindigkeit V immer mehr beschleunigt; so kann die Bewegung der Flüssigkeit als gleichförmig angesehen werden, indem die Geschwindigkeit V in der Ausflußöffnung den konstanten Werth aus der letzten Gleichung behält.

Bei alle den Fällen, wo es sich um den Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer Öffnung Ω handelt, und wo die Flüssigkeit jenseit dieser Öffnung bis auf eine gewisse Entfernung einen zusammenhängenden Strahl bildet, während der Druck p'' gegen die Flächeneinheit der Ausflußöffnung durch den Widerstand irgend eines Mediums, wie z. B. der atmosphärischen Luft, in welches sich die Flüssigkeit ergießt, hervorgebracht wird, kann hinsichtlich der Wirkung dieses Druckes die folgende allgemeine Bemerkung gemacht werden.

Da der ausfließende Strahl der Flüssigkeit den direkten Zutritt des Mediums zu der Ausflußöffnung Ω nicht verstattet; so

kommt es in Frage, ob die Wirkung der Spannung dieses diums gegen die in der Öffnung Ω befindlichen Theilchen Flüssigkeit dieselbe sei, als wenn das Medium freien Zutritt jener Öffnung hätte, und gegen dieselbe in ähnlicher Weise dr wie Dies ein dagegen angebrachter Stempel thun würde.

Um Dies einzusehen, braucht man nur den ganzen aus ßenden Strahl von der Ausflußöffnung Ω bis zu den Pun zu betrachten, wo der Zusammenhang seiner Theilchen aufh Wäre dieser Strahl rings herum von einem Medium umge welches in allen Punkten denselben Druck p'' auf die Flächene heit ausübte; so würden sich sämmtliche Pressungen des M diums auf die äußere Oberfläche des Strahles im Gleichgewi erhalten (vergl. die Prinzipien des ersten Abschnittes). Nun aber der fragliche Strahl nicht ringsherum von dem Medium u geben, nämlich an der Stelle nicht, wo er an der Ausflußöffnun Ω haftet, wohin das Medium nicht gelangen kann. Hieraus folgt, daß die auf die übrigen Theile des Strahles wirkenden Pressungen eine Resultante haben, welche gleich dem Drucke $\Omega p''$ ist, den das Medium unmittelbar auf die Öffnung Ω auszuüben vermöchte, und deren Richtung auch mit diesem Drucke zusammenfällt. Mit anderen Worten, der ausfließende Strahl wird durch die Pressungen des umgebenden Mediums mit der Kraft $\Omega p''$ und in normaler Richtung gegen die Ausflußöffnung gedrückt, und bringt hierdurch gegen die in der Öffnung Ω befindlichen Theilchen denselben Druck p'' für jede Flächeneinheit hervor, wie wenn das Medium direkten Zutritt zu jenen Theilchen hätte.

§. 66. Beharrungszustand einer aus einer Röhre sich ergießenden Flüssigkeit.

Wenn die Bewegung einer Flüssigkeit von der Art ist, daß durch einen jeden Punkt des von derselben eingenommenen Raumes zu jeder Zeit Theilchen der Flüssigkeit von derselben Dichtigkeit, Geschwindigkeit und Richtung hindurchgehen; so sagt man die Flüssigkeit befinde sich im Beharrungszustande.

Der Beharrungszustand einer aus einer Röhre sich ergießenden Flüssigkeit macht es also erforderlich, daß die in den verschiedenen Punkten stattfindende Dichtigkeit μ von der Zeit unabhä

gig, daß also $\frac{d\mu}{dt} = o$ sei, was bei unpreßbaren Flüssigkeiten stets der Fall ist, ferner daß die Geschwindigkeit V von der Zeit unabhängig oder daß

$$\frac{dV}{dt} = o$$

sei.

Hieraus folgt, daß man die Eigenschaften des Beharrungszustandes einer unpreßbaren Flüssigkeit, welche sich aus einer stets voll erhaltenen Röhre ergießt, wenn man in den Formeln des §s 62 $\frac{dV}{dt} = o$ setzt. Dies ergibt nach Gl. (258)

$$p' - p'' + wZ = \frac{w}{2g} V^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right);$$

also

$$V = \sqrt{\frac{2g\left(Z + \frac{p'-p''}{w}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}}}, \qquad \ldots\ldots (271)$$

eine Formel, welche mit der im vorigen Paragraph durch eine andere Betrachtung gefundenen Gleichung (270) vollkommen übereinstimmt, wie man wol vorhersehen konnte. Es geht auch aus dieser Formel hervor, daß ein Beharrungszustand nur dann möglich ist, wenn die Ausflußöffnung Ω kleiner ist, als der oberste Querschnitt O' der Röhre, weil sonst der Werth von V imaginär werden würde.

Sind die Pressungen p' und p'' gegen die äußersten Querschnitte O' und Ω einander gleich, bestehen dieselben z. B. aus dem Drucke der atmosphärischen Luft; so wird

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}}} \qquad \ldots\ldots (272)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$Z = \frac{V^2}{2g} - \frac{V^2 \Omega^2}{2g O'^2}.$$

Bezeichnet man nun die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im

folgt, daß unter den für jene Gleichung beſtehenden Bedingungen die im Beharrungszuſtande aus der Ausflußöffnung tretenden Theilchen der Flüſſigkeit dieſelbe Geſchwindigkeit beſitzen, als wenn ſie vom oberen Spiegel frei herabgefallen wären. Hierin beſteht der von Torricelli zuerſt aufgeſtellte Lehrſatz.

Da die Geſchwindigkeit V konſtant iſt; ſo findet man für das Volum Q der Flüſſigkeit, welches ſich in jeder Zeiteinheit aus dem Querſchnitte Ω ergießt, oder für die Ausflußmenge der Röhre für die Zeiteinheit

$$Q = \Omega V, \qquad \ldots . \quad (276)$$

worin man für V je nach den Umſtänden den Werth aus Einer der Gleichungen (271), (272) oder (275) zu ſubſtituiren hat.

Wenn die äußeren Preſſungen gleich und die Ausflußöffnung im Verhältniß zum oberen Spiegel der Flüſſigkeit ſehr klein wäre; ſo würde man

$$Q = \Omega \sqrt{2gZ} \qquad \ldots . \quad (277)$$

haben.

Um den hydrauliſchen Druck p zu beſtimmen, welcher während des obigen Beharrungszuſtandes in irgend einem Querſchnitte ω der Röhre herrſcht; ſo hat man hierfür nach Gl. (245), da hier $z' = o$ und $\frac{dV}{dt} = o$ iſt,

$$p' - p + wz = \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} \right),$$

alſo

$$p = p' + wz - \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} \right), \qquad \ldots . \quad (278)$$

oder wenn man für V ſeinen Werth aus Gl. (271) ſubſtituirt,

$$p = p' + wz - [wZ + (p' - p'')] \frac{\frac{O'^2}{\omega^2} - 1}{\frac{O'^2}{\Omega^2} - 1} \qquad \ldots . \quad (279)$$

Für den Fall, daß die Preſſungen p' und p'' einander gleich wären, würde

$$p = p' + wz - wZ \frac{\frac{O'^2}{\omega^2} - 1}{\frac{O'^2}{\Omega^2} - 1} \qquad \ldots . \quad (280)$$

ein.

Aus den letzteren Formeln ersieht man, daß der Werth in irgend einem Querschnitte ω der Röhre stattfindenden hydr lichen Druckes nicht von der Figur der Röhre, sondern nur v den Verhältnissen $\frac{\Omega'}{\omega}$ und $\frac{\Omega'}{\Omega}$ und von der Tiefe z des Quer schnittes ω unter dem obersten Spiegel der Flüssigkeit abhängt. Dieser Druck ist um die Größe $\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\right)$ kleiner, a der hydrostatische Druck $p'+wz$, welcher im Querschnitte herrschen würde, wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre, und m sieht, wie sich der Druck gegen die Röhre vermindert, wenn d Ausflußgeschwindigkeit V zunimmt.

Bei der Gleichung (280) haben wir übrigens noch folgend für die Bewegung der Flüssigkeit sehr wichtige Bemerkung z machen. Man erkennt daraus, daß es möglich ist, daß der Werth des Druckes p in irgend einem Querschnitte ω negativ au fallen könne. Dies wird sich ereignen, wenn die Größe des in der Tiefe z unter dem Oberspiegel liegenden Querschnittes ω unter einen gewissen Gränzwerth herabsinkt, oder sobald man

$$\omega^2 < \frac{\Omega^2}{\frac{\Omega^2}{\Omega'^2}+\frac{p'+wz}{wZ}\left(1-\frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\right)}$$

hat.

Wenn der Druck in irgend einem Querschnitte aber negativ sein sollte; so würde Dies heißen, daß die Röhrenwände in diesem Querschnitte von der Flüssigkeit nicht nach außen gedrückt, sondern nach innen gezogen würden. Eine solche Wirkung vermag eine Flüssigkeit wegen ihrer physischen Konstitution offenbar nicht zu leisten, und es folgt, daß die Flüssigkeit unter den gedachten Umständen entweder den Querschnitt ω nicht erfüllen, sondern sich an dieser Stelle, auch wol schon etwas früher, von den Röhrenwänden losreißen und im Innern der Röhre einen freien Strahl bilden wird, oder daß, wenn der Querschnitt ω wirklich gefüllt bleibt, sich die Flüssigkeit von der Ausflußöffnung Ω her aufwärts bis zu einem gewissen Punkte von den Röhrenwänden trennen wird, sodaß sich dadurch die eigentliche Ausflußöffnung verkleinert und auf den Durchschnitt des entstehenden freien Strahles an dieser Stelle reduzirt; denn man erkennt dur

Gl. (280), daß der Werth von p bei jeder Kleinheit von ω doch dadurch positiv erhalten werden kann, daß die Ausflußöffnung Ω klein genug gemacht wird, indem zu diesem Zwecke nur

$$\Omega^2 < \frac{O'^2}{1+\frac{wZ}{p'+wz}\left(\frac{O'^2}{\omega^2}-1\right)}$$

zu sein braucht. In dem letzteren Falle braucht sich die Trennung der Flüssigkeit von den Röhrenwänden nicht gerade bis zum Querschnitte ω zu erstrecken. Wenn die Trennung jedoch schon im Querschnitte ω stattgefunden hat; so wird eine Vereinigung mit den Röhrenwänden bis zur Ausmündung Ω, wenigstens in dieser Öffnung Ω selbst nicht wieder stattfinden können: denn wenn ω schon so klein war, daß dadurch der Werth von p aus Gl. (280) negativ wurde; so wird ein noch kleinerer Querschnitt, den doch jedenfalls der getrennte Strahl haben würde, den Werth von p noch eher negativ machen, falls Ω unverändert bliebe.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß wenn auch die konstante Ausflußgeschwindigkeit V dann schon möglich ist, wenn nur die Ausflußöffnung Ω kleiner ist, als der obere Spiegel O' der Flüssigkeit, der Durchfluß durch die Röhre unter der Bedingung, daß die Letztere überall gefüllt sei, doch nur dann erfolgen kann, wenn die verschiedenen Querschnitte der Röhre der Bedingung

$$\omega^2 > \frac{\Omega^2}{\frac{\Omega^2}{O'^2}+\frac{p'+wz}{wZ}\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)} \qquad \ldots\ (280^a)$$

folgen oder wenn die Ausflußöffnung der Bedingung

$$\Omega^2 < \frac{O'^2}{1+\frac{wZ}{p'+wz}\left(\frac{O'^2}{\omega^2}-1\right)} \qquad \ldots\ (280^b)$$

ein Genüge leistet.

Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, und wollte man den Zustand des gleichförmigen Ausflusses der Flüssigkeit unter den gegebenen Umständen bestimmen; so hätte man denjenigen Querschnitt der Röhre zu ermitteln, in welchem sich die Flüssigkeit zuerst von den Wänden trennt. Dieser Querschnitt wäre als-

dratfuß etwa 2091 Pfund beträgt, während das Gewicht eines Kubikfußes Wasser gleich 66 Pfund ist, würde $\frac{p'}{w} = \frac{2091}{66} = 31{,}7$ Fuß sein, d. h. in dem Röhrenstücke GC wäre Wasser nur bis auf eine Tiefe von etwa 31,7 unter dem Querschnitte GH fortzuleiten, wenn dasselbe die Röhre überall erfüllen sollte: senkte sich die Röhre tiefer; so würde sich das Wasser von den Röhrenwänden trennen. Diese Tiefe $\frac{p'}{w} = 31{,}7$ Fuß entspricht übrigens genau der Höhe einer Wassersäule, welche dem atmosphärischen Drucke das Gleichgewicht zu halten vermag.

Aus dem Vorstehenden folgt ferner, daß wenn sich die Röhre GC auch tiefer herabsenkt, als um die Größe $\frac{p'}{w}$, Dies auf die Ausflußmenge keinen Einfluß haben kann, da der in der Tiefe $\frac{p'}{w} + h$ unter dem Spiegel AB liegende Querschnitt C′D′ der Röhre als eigentliche Ausflußöffnung angesehen werden muß. Die Geschwindigkeit in dieser Öffnung wird nach Gl. (275) (da hier Ω im Vergleich zu O′ als sehr klein angesehen wird)

$$V = \sqrt{2g\left(\frac{p'}{w} + h\right)}$$

und daher die Ausflußmenge

$$Q = \Omega\sqrt{2g\left(\frac{p'}{w} + h\right)}$$

sein.

Eine größere Quantität Flüssigkeit kann aus der Mündung CD nicht herausfließen, und wenn sich die Röhre GC von konstantem Querschnitt noch so tief in vertikaler Richtung herabsenkt. Wollte man eine größere und zwar eine der gesammten Druckhöhe Z entsprechende Ausflußmenge aus der Mündung Ω erzielen; so müßte man die Röhre nach oben angemessen erweitern. Diese Erweiterung könnte übrigens oberhalb Ω einen konstanten Querschnitt erhalten, welcher nach der Formel (280ᵃ) nur

$$> \frac{\Omega^2}{\frac{\Omega^2}{O'^2} + \frac{p' + wh}{wZ}\left(1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right)}$$

sein müßte.

§. 67. Beharrungszustand einer aus einer Röhre sich ergießenden Flüssigkeit unter der Bedingung, daß in jeder Zeiteinheit eine bestimmte Quantität Q der Flüssigkeit in die Röhre geführt werde.

Im vorigen Paragraph wurde der Beharrungszustand einer Flüssigkeit unter der Voraussetzung betrachtet, daß die Röhre immer bis zu einem gewissen Querschnitte O′ oder bis zu einer gewissen Höhe Z voll erhalten würde. Hieraus ergab sich denn nach den Gleichungen (271), (272) oder (275) die Ausflußgeschwindigkeit V und nach Gl. (276) die Ausflußmenge Q, welche offenbar gleich der Quantität der Flüssigkeit ist, die in dem obersten Querschnitte O′ während jeder Zeiteinheit eingeführt werden muß, um den obersten Spiegel auf der Höhe des Querschnittes O′ zu erhalten.

Denken wir uns jetzt, es sei die letztere Quantität Q gegeben, welche während jeder Zeiteinheit in die Röhre gegossen wird, und es solle die Höhe Z bestimmt werden, in welcher sich unter diesen Umständen der oberste Spiegel O′ der Flüssigkeit halten wird, sobald der Beharrungszustand eingetreten ist. Da in diesem Zustande Q auch die Ausflußmenge für jede Zeiteinheit bezeichnet; so hat man

$$Q = \Omega V,$$

oder wenn man für V seinen Werth aus Gl. (271) setzt,

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g\left(Z + \frac{p' - p''}{w}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}}} \qquad \ldots\ldots (281)$$

Wenn die Figur der Röhre gegeben ist; so wird ein jeder Querschnitt der Röhre eine Funktion seiner vertikalen Höhe über der Ausflußöffnung sein. Demnach wird O′ eine Funktion von Z sein. Substituirt man diese Funktion für O′, und löst die vorstehende Gleichung für Z auf; so erhält man die gesuchte Höhe, in welcher sich der oberste Spiegel der Flüssigkeit im Beharrungszustande erhalten wird.

Wäre $p' = p''$ und die Ausflußöffnung Ω sehr klein gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre, sodaß man die Größe $\frac{\Omega^2}{O'^2}$

gegen die Einheit vernachlässigen könnte; so würde man aus Gl. (281)

$$Z=\frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad \ldots\ldots (282)$$

erhalten.

§. 68. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer Röhre, wenn der obere Spiegel allmählig herabsinkt.

Wenn die in der Röhre ABDC enthaltene Flüssigkeit $abDC$ aus der unteren Öffnung CD ausfließt, indem sich der obere Spiegel ab allmählig in der Röhre herabsenkt; so hat man O'' konstant $=\Omega$, s'' konstant, z'' konstant; mithin nach Gl. (243)

$$p'-p''+w(z''-z')=\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{\omega}+\frac{w}{2g}V^2\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \quad \ldots\ldots (283)$$

Setzt man bei dem hier in Rede stehenden Falle die veränderlichen Größen $Fe=s''-s'=S$ und $FM=z''-z'=Z$, indem man die s und z jetzt vom untersten Querschnitte, oder vom Punkte F aus, und nicht, wie früher, vom Punkte L aus mißt; so wird die vorstehende Gleichung

$$p'-p''+wZ=\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_{o}^{S}\frac{ds}{\omega}+\frac{w}{2g}V^2\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \quad \ldots\ldots (284)$$

Da hier $-ds'=dS$ ist; so hat man wegen Gleichung (244)

$$-O'dS=\Omega V\,dt, \quad \ldots\ldots (285)$$

welche mit der Gl. (284) zu verbinden ist.

Für den hydraulischen Druck p in irgend einem Querschnitte ω der Röhre würde man nach Gl. (247) haben, wenn man α [illegible] gekürzt

$$\left.\begin{aligned}\int_s^S \frac{ds}{\omega} &= N,\\ \int_o^S \frac{ds}{\omega} &= N''\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (286)$$

setzt,

$$p = p' - (p' - p'')\frac{N}{N''}$$

$$+w\left[(Z-z) - Z\frac{N}{N''}\right] - \frac{wV^2}{2g}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O''^2} - \left(1 - \frac{\Omega^2}{O''^2}\right)\frac{N}{N''}\right] \ldots (287)$$

§. 69. Besonderer Fall, wo die Ausflußöffnung Ω ungemein klein ist gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre, und wo die Letztere ein vertikal stehendes prismatisches Gefäß bildet.

Betrachten wir die im vorhergehenden Paragraph näher bezeichnete Aufgabe unter der Einschränkung, daß die Ausflußöffnung Ω ungemein klein sei gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre; so kann man in Gleichung (284) die in Ω^2 multiplizirten Glieder, als sehr kleine Größen, gegen die übrigen vernachlässigen. Thut man Dies, indem man auch das in $\Omega\frac{dV}{dt}$ multiplizirte Glied unterdrückt, da nach Gl. (285) $dt = -\frac{O'dS}{\Omega V}$, also $\Omega\frac{dV}{dt} = -\frac{\Omega^2}{O'}V\frac{dV}{dS}$ ist; so erhält man

$$p' - p'' + wZ = \frac{w}{2g}V^2,$$

mithin

$$V = \sqrt{2g\left(Z + \frac{p' - p''}{w}\right)}, \quad \ldots\ldots (288)$$

und wenn die Pressungen auf die äußersten Querschnitte einander gleich sind,

$$V = \sqrt{2gZ} \quad \ldots\ldots (289)$$

Die Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung ist also für diesen

Fall gleich der der Druckhöhe Z zukommenden Ausflußgeschwindigkeit.

Für den Druck p in irgend einem Querschnitte der Röhre erhält man unter den gemachten Voraussetzungen wegen Gl. (287)

$$p = p' - (p' - p'')\frac{N}{N''} + w\left[(Z - z) - Z\frac{N}{N''}\right] + \frac{w V^2}{2g}\frac{N}{N''},$$

und wenn man darin für V den obigen Werth aus Gl. (288) setzt,

$$p = p' + w(Z - z) \qquad \ldots . \quad (290)$$

Der Werth des Druckes ist hiernach derselbe, als wenn die Flüssigkeit in Ruhe wäre, ein Resultat, welches nicht befremden darf, wenn man erwägt, daß die Ausflußöffnung Ω ungemein klein gegen irgend einen anderen Querschnitt ω der Röhre angenommen ist, woraus hervorgeht, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem anderen Querschnitte ω sehr klein ist und fast gleich null angesehen werden kann.

Nehmen wir jetzt noch an, daß die Röhre prismatisch sei und vertikal stehe, sodaß ihr Querschnitt ω eine konstante Größe O wird und man überall die Buchstaben z und Z resp. an die Stelle von s und S setzen kann. Aus Gl. (285) folgt alsdann

$$dt = -\frac{O}{\Omega}\frac{dZ}{V},$$

oder wenn man für V den Werth aus Gl. (289) substituirt,

$$dt = -\frac{O}{\Omega\sqrt{2g}}\frac{dZ}{\sqrt{Z + \frac{p' - p''}{w}}}.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration, wenn man den Werth von Z für $t = o$ mit ζ bezeichnet,

$$t = -\frac{O}{\Omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta}^{Z}\frac{dZ}{\sqrt{Z + \frac{p' - p''}{w}}}$$

d. i.

$$t=\frac{2\Theta}{\Omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\zeta+\frac{p'-p''}{w}}-\sqrt{Z+\frac{p'-p''}{w}}\right) \quad \ldots\ldots (291)$$

Der Werth von t aus dieser Gleichung stellt die Zeit dar, welche erforderlich ist, damit sich der Spiegel der Flüssigkeit von der Höhe ζ über der Ausflußöffnung bis zur Höhe Z herabsenke.

Für $Z=o$ ergibt der Ausdruck

$$T=\frac{2\Theta}{\Omega\sqrt{2g}}\sqrt{\zeta+\frac{p'-p''}{w}} \quad \ldots\ldots (292)$$

die Zeit, in welcher sich das Gefäß ganz leert.

Wenn die Pressungen p' und p'' auf die beiden äußersten Querschnitte einander gleich sind; so hat man für die Zeit t, in welcher sich der Spiegel von der Höhe ζ bis auf die Höhe Z herabsenkt,

$$t=\frac{2\Theta}{\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{\zeta}-\sqrt{Z}), \quad \ldots\ldots (293)$$

und für die Zeit T, in welcher sich das ganze Gefäß leert,

$$T=\frac{2\Theta}{\Omega}\sqrt{\frac{\zeta}{2g}} \quad \ldots\ldots (294)$$

Wäre die Röhre immer bis zur Höhe ζ voll erhalten; so würde unter den letzteren Voraussetzungen nach den Gleichungen (276) und (275) in jeder Zeiteinheit das Volum

$$Q=\Omega\sqrt{2g\zeta}$$

ausgeflossen sein. Zum Ausfließen eines der ganzen in der Röhre momentan enthaltenen Flüssigkeit gleichen Volums $O\zeta$ würde also bei konstanter Druckhöhe die Zeit

$$\frac{O\zeta}{\Omega\sqrt{2g\zeta}}=\frac{O}{\Omega}\sqrt{\frac{\zeta}{2g}}$$

erforderlich sein. Aus diesem und aus dem Ausdrucke (294) folgt, daß die Zeit, in welcher sich das eben betrachtete Gefäß für den Fall, wo $p'=p''$ ist, leert, doppelt so groß ist, als die Zeit, in welcher aus dem bis zur Höhe Z beständig voll erhaltenen Gefäße ein gleiches Volum der Flüssigkeit herausfließt.

Wenn man den aus Gl. (283) sich ergebenden Werth von

$$\sqrt{z} = \sqrt{\zeta} - \frac{t\Omega\sqrt{2g}}{2\mathrm{O}}$$

in Gl. (289) einführt; so kommt

$$\mathrm{V} = \sqrt{2g\zeta} - g\frac{\Omega}{\mathrm{O}}t, \qquad \ldots\ldots (285)$$

woraus man sieht, daß die Ausflußgeschwindigkeit unter den hierbei gemachten Voraussetzungen eine gleichförmig verzögerte ist.

§. 70. Fall, wo die Form der vertikal stehenden Röhre die Bedingung erfüllen soll, daß sich beim Ausflusse der Flüssigkeit der obere Spiegel in gleichen Zeiten um gleich viel herabsenke.

Dieser Fall kommt bei der Konstruktion der Wasseruhren vor, wo die Ausflußöffnung im Vergleich zu allen übrigen Querschnitten der Röhre, welche in Betracht kommen, ungemein klein ist, und wo die Bedingung gegeben ist, daß sich der obere Spiegel der Flüssigkeit in jeder Zeiteinheit um eine konstante Größe α herabsenken soll.

Da die Senkung des Spiegels in der Zeit dt gleich αdt ist, diese Senkung nach Gl. (285) aber durch $-d\mathrm{Z} = \frac{\Omega\mathrm{V}}{\mathrm{O}'}\,dt$, oder wenn man für V den Werth $\sqrt{2g\mathrm{Z}}$ aus Gl. (289) setzt, durch $\frac{\Omega}{\mathrm{O}'}\sqrt{2g\mathrm{Z}}\,dt$ dargestellt wird; so hat man die Bedingungsgleichung

$$\alpha dt = \frac{\Omega}{\mathrm{O}'}\sqrt{2g\mathrm{Z}}\,.\,dt$$

oder

$$\alpha = \frac{\Omega}{\mathrm{O}'}\sqrt{2g\mathrm{Z}},$$

woraus

$$\mathrm{O}'^2 = \frac{\Omega^2.2g\mathrm{Z}}{\alpha^2} \qquad \ldots\ldots (296)$$

folgt.

Durch diese Gleichung ist man im Stande, die Größe des Querschnittes O′ zu bestimmen, welchen das Gefäß in der Höhe Z über der Ausflußöffnung haben muß.

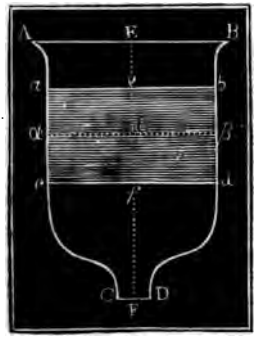
Wären alle Querschnitte des Gefäßes Kreise, deren veränderlicher Halbmesser r sei; so hätte man $O'^2 = r^4 \pi^2$; mithin nach Gl. (296)

$$r^4 = \frac{\Omega^2 . 2gZ}{\pi^2 \alpha^2}. \qquad \ldots . (297)$$

Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem Gefäße von beliebiger Gestalt, dessen Querschnitte sich nur allmählig ändern.

§. 71. Bewegung einer solchen Flüssigkeit in einem Gefäße mit vertikaler Axe, dessen Ausflußöffnung sich nach innen bergestalt erweitert, daß alle Theilchen der Flüssigkeit parallel zur Axe austreten können.

Wenn die Form des Gefäßes ABDC, in welchem sich eine Quantität $abdc$ der Flüssigkeit bewegt, von der vorstehend beschriebenen Beschaffenheit ist; so erkennt man leicht, daß man auf dasselbe ohne erhebliche Fehler die Hypothese des Parallelismus der Querschichten anwenden, also annehmen kann, daß irgend eine horizontale Schicht von dem Querschnitte $\alpha\beta = \omega$ und der vertikalen Stärke $dz = v\,dt$ während des Zeitelementes dt in die Lage der nächst folgenden Schicht von dem horizontalen Querschnitte $\omega + d\omega$ und der vertikalen Stärke $(v + dv)\,dt$ rücke, selbst wenn ω nicht mehr, wie früher, sehr klein, sondern von beliebiger Größe gedacht wird.



Unter diesen Umständen fällt aber der hier zu betrachtende Fall ganz und gar mit denen zusammen, welche in den Paragraphen 58 bis 70 näher erörtert sind, sobald man die Axe der dort untersuchten Röhre nur vertikal annimmt, also überall die Größen z, z', z'', Z, Z' unter Beziehung auf dieselben Querschnitte

des Gefäßes, sowie es in jenen Paragraphen erläutert ist, an die Stelle der korrespondirenden Größen s, s', s'', S, S' setzt. Sämmtliche Formeln jener Paragraphen behalten für das vorliegende Gefäß unter den verschiedenen dort untersuchten Bedingungen der Bewegung oder des Ausflusses der Flüssigkeit ihre allgemeine Gestalt bei, und führen zu bestimmten Auflösungen, sobald man die Abhängigkeit irgend eines Querschnittes ω von der zugehörigen Ordinate z kennt.

§. 72. **Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem Gefäße von beliebiger Gestalt, dessen Querschnitte sich allmählig ändern, und dessen Ausflußöffnung nach innen allmählig dergestalt erweitert ist, daß alle Theilchen der Flüssigkeit parallel zur Normalen auf dieser Öffnung austreten können.**

Auf ein solches Gefäß von der seitstehenden allgemeinen Gestalt läßt sich die Hypothese vom Parallelismus der Querschichten nicht ohne Weiteres anwenden. Wenn nun aber auch die Bewegung der Theilchen der Flüssigkeit im Innern des Gefäßes unbekannt ist; so leuchtet doch ein, daß man näherungsweise annehmen könne, jene Theilchen bewegen sich in Kurven, wie $E\varepsilon F$, oder in Kanälen von ungemein kleinem Querschnitte, deren oberes Ende auf dem horizontalen Oberspiegel AB und deren unteres Ende auf der Ebene des unteren Querschnittes CD normal stehe. Kennte man nun die Form dieser Kanäle $E\varepsilon F$, sowie die Größen der Querschnitte ε für die entsprechende vertikale Ordinate $BQ = z$; so würde man auf die Bewegung der Flüssigkeit in einem jeden solchen Kanale die Betrachtungen der Paragraphe 58 bis 70 in Anwendung bringen und durch eine geeignete Zusammensetzung der betreffenden Resultate die wichtigsten Momente der Bewegung der ganzen Flüssigkeit in dem gegebenen Gefäße darstellen können.

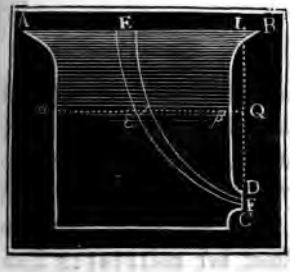
Da jedoch diese Elemente nicht bekannt sind; so folgt, daß man auf die Auflösung aller derjenigen Fälle bis jetzt verzichten muß, wo es nach jenen Paragraphen auf die fragliche Bekannt-

schaft der gedachten Kanäle ankommt, daß man aber in den übrigen Fällen, welche von der Form dieser Kanäle unabhängig sind, brauchbare Resultate erwarten darf.

Der letzteren Fälle sind nur die beiden folgenden.

§. 73. Beharrungszustand einer aus einem beständig voll erhaltenen Gefäße von beliebiger Form und den oben erwähnten Eigenschaften sich ergießenden Flüssigkeit.

Bei diesem Zustande der Bewegung einer Flüssigkeit lehrt der Paragraph 66, daß die Ausflußgeschwindigkeit V nicht von der Form der einzelnen Kanäle, sondern bloß von der Druckhöhe Z über der Ausflußöffnung und von dem Verhältnisse der unteren Querschnitte jener Kanäle zu dem oberen Querschnitte derselben abhängt. Nimmt man daher näherungsweise an, daß das eben erwähnte Verhältniß gleich dem Verhältnisse der wirklichen Ausflußöffnung $CD = \Omega$ zu dem oberen Spiegel $AB = O'$ sei, was gewiß nur sehr wenig von der Wahrheit abweichen wird; so erhält man für die konstante Ausflußgeschwindigkeit nach Gl. (271)



$$V = \sqrt{\frac{2g\left(Z + \frac{p' - p''}{w}\right)}{1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}}} \quad \ldots\ldots (298)$$

Auch bei dieser Gleichung kann man bemerken, daß der in Rede stehende Beharrungszustand nur dann stattfinden kann, wenn die Ausflußöffnung Ω kleiner ist, als die Fläche O' des oberen Spiegels der Flüssigkeit.

Wenn die äußeren Pressungen p' und p'' einander gleich sind; so hat man

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}}} \quad \ldots\ldots (299)$$

Auch aus dieser Gleichung folgt, wie in §. 66, daß wenn v' die Geschwindigkeit der Schichten im oberen Spiegel der Flüssigkeit bezeichnet,

$$Z = \frac{V^2}{2g} - \frac{v'^2}{2g} \qquad \ldots\ (300)$$

und

$$V = \sqrt{2gZ + v'^2} \qquad \ldots\ (301)$$

ist.

Wenn gleichzeitig, wo $p' = p''$ ist, die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu dem oberen Spiegel O' der Flüssigkeit so klein wäre, daß man die Größe $\frac{\Omega^2}{O'^2}$ gegen die Einheit vernachlässigen könnte; so würde man einfach

$$V = \sqrt{2gZ} \qquad \ldots\ (302)$$

haben.

In diesen Formeln stellt Z die Druckhöhe FL der Flüssigkeit über dem Mittelpunkte der Ausflußöffnung dar. Es wird aber dabei vorausgesetzt, daß die vertikale Dimension dieser Öffnung gegen die Höhe Z nur unbedeutend sei. Wäre Dies nicht der Fall; so hat man nach den §.§. 75 ff. zu verfahren, um denjenigen Werth von Z zu bestimmen, welcher der mittleren Ausflußgeschwindigkeit V entspricht.

Die Ausflußmenge für die Zeiteinheit ist hier natürlich, ebenso wie in §. 66,

$$Q = \Omega V \qquad \ldots\ (303)$$

Der hydraulische Druck p im Punkte ε der Flüssigkeit, welcher um $LQ = z$ unter dem Spiegel liegt, würde nach Gl. (279)

$$p = p' + \varpi z - [\varpi Z + (p' - p'')] \frac{\frac{O'^2}{\omega^2} - 1}{\frac{O'^2}{\Omega^2} - 1} \qquad \ldots\ (304)$$

sein, worin die Größen O', ω, Ω die Querschnitte der vorhin erwähnten Kanäle $E\varepsilon F$ resp. in den Punkten E, ε und F bezeichnen. Nun könnte man wol für die Größe $\frac{O'}{\Omega}$ das Verhältniß des oberen Spiegels AB zur Ausflußöffnung CD substitui-

…; für das Verhältniß $\frac{O'}{\omega}$ bietet sich jedoch nicht so leicht eine …s den Dimensionen des gegebenen Gefäßes abzuleitende Größe …r. Falls jedoch der Punkt ε in einem Theile des Gefäßes …ge, welcher auf eine ziemliche Länge prismatisch wäre, sodaß …man ohne erheblichen Fehler annehmen könnte, daß sich alle Theilchen der Schicht $\alpha\beta$ parallel zur Axe dieses Prismas mit derselben Geschwindigkeit bewegten; so würde man näherungsweise in der vorstehenden Gleichung für O', ω, Ω resp. die Querschnitte AB, $\alpha\beta$, CD des gegebenen Gefäßes substituiren können.

Für $p'=p''$ würde man in diesem Falle

$$p = p' + wz - wZ\frac{\frac{O'^2}{\omega^2}-1}{\frac{O'^2}{\Omega^2}-1} \qquad \ldots\ldots (305)$$

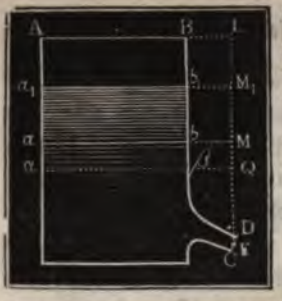
haben, und wenn die Ausflußöffnung Ω gegen den oberen Spiegel O' sehr klein wäre, sodaß $\frac{O'}{\Omega^2}-1$ eine sehr große und $\frac{1}{\frac{O'^2}{\Omega^2}-1}$ eine sehr kleine Zahl würde, und man deshalb das letzte Glied der vorstehenden Gleichung vernachlässigen könnte, selbst wenn das Gefäß in der Nähe von $\alpha\beta$ nicht prismatisch wäre, was darauf hinausliefe, daß man die Flüssigkeit im Querschnitte $\alpha\beta$ als ruhend betrachtete; so würde

$$p = p' + wz \qquad \ldots\ldots (306)$$

werden.

§. 74. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße von beliebiger Gestalt, wenn der obere Spiegel allmählig herabsinkt, unter der Voraussetzung, daß die Ausflußöffnung Ω gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre ungemein klein sei.

Ist $a_1 b_1$ der Spiegel der Flüssigkeit im Anfange der Bewegung und ab derselbe zur Zeit t, und rechnet man auch hier, wie in §. 69, die Höhe $FQ=z$, $FM=Z$, $FM_1=Z_1$ vom



Mittelpunkte der Ausflußöffnung ab; so hat man unter den gemachten Bedingungen nach Gl. (288)

$$V = \sqrt{2g\left(Z + \frac{p' - p''}{w}\right)}, \quad \ldots (307)$$

und wenn $p' = p''$ ist,

$$V = \sqrt{2gZ} \quad \ldots (308)$$

Ferner nach Gl. (290) für den hydraulischen Druck im Querschnitte $\alpha\beta$

$$p = p' + w(Z - z), \quad \ldots (309)$$

wie wenn die Flüssigkeit in diesem Querschnitte in Ruhe wäre.

Wäre das Gefäß unter den übrigen gemachten Voraussetzungen bis auf die Stelle unmittelbar bei der Ausflußöffnung prismatisch, und hätte dasselbe in horizontaler Richtung den konstanten Querschnitt O; so würde man auch die Formeln (291) bis (295) darauf anwenden können, und demnach für die Zeit t, während welcher der Spiegel von der Höhe ζ zur Höhe Z herabsinkt,

$$t = \frac{2O}{\Omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\zeta + \frac{p' - p''}{w}} - \sqrt{Z + \frac{p' - p''}{w}}\right) \ldots (310)$$

erhalten.

Die Zeit T, in welcher sich das Gefäß ganz leert, würde näherungsweise

$$T = \frac{2O}{\Omega\sqrt{2g}}\sqrt{\zeta + \frac{p' - p''}{w}} \quad \ldots (311)$$

sein.

Für $p' = p''$ würden diese Ausdrücke einfach

$$t = \frac{2O}{\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{\zeta} - \sqrt{Z}) \quad \ldots (312)$$

und

$$T = \frac{2O}{\Omega}\sqrt{\frac{\zeta}{2g}} \quad \ldots (313)$$

werden, und man kann auch hier schließen, daß die Zeit, in welcher sich das oben betrachtete Gefäß leert, doppelt so groß ist, als

Zeit, in welcher sich das eben betrachtete Gefäß leert, doppelt groß ist, als die Zeit, in welcher aus dem bis zur Höhe ζ beständig erhaltenen Gefäße ein gleiches Volum der Flüssigkeit herausfließt.

Die Ausflußgeschwindigkeit V am Ende der Zeit t ist für $=p''$ ebenfalls eine gleichförmig verzögerte, nämlich

$$V = \sqrt{2g\zeta} - g\frac{\Omega}{O}t \quad \ldots\ldots (314)$$

Für das Volum Q der während der Zeit t ausfließenden Flüssigkeit hat man allgemein

$$Q = \int_0^t \Omega V\, dt = \Omega \int_0^t V dt,$$

oder wenn man hierin für V den Werth aus Gl. (314) substituirt und gehörig integrirt,

$$Q = \Omega\left(t\sqrt{2g\zeta} - \frac{g\Omega}{2O}t^2\right) \quad \ldots\ldots (315)$$

Mittlere Ausflußgeschwindigkeit und mittlere Druckhöhe einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit, wenn die vertikalen Dimensionen der Ausflußöffnung im Vergleich zu der Druckhöhe bedeutend sind.

§. 75. Allgemeiner Ausdruck für die mittlere Ausflußgeschwindigkeit und die mittlere Druckhöhe.

Nach den obigen Formeln hängt die Ausflußgeschwindigkeit V einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit theils von der Figur des Gefäßes und den Querschnitten desselben, theils aber auch von der Druckhöhe Z über der Ausflußöffnung Ω ab.

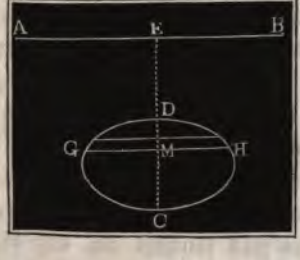
Ist diese Öffnung horizontal; so wird, da der Oberspiegel der Flüssigkeit im Allgemeinen als horizontal angesehen werden kann, die Druckhöhe über einem jeden Punkte der Ausflußöffnung dieselbe sein, und es würde in Bezug auf die Druckhöhe Z gleichgültig sein, welche absoluten Dimensionen jene Öffnung besäße.

Anders würde sich Dies jedoch herausstellen, wenn die Ausflußöffnung nicht in einer horizontalen, sondern in einer geneigten oder vertikalen Ebene läge. Für diesen Fall leuchtet ein, daß die die oberen Punkte der Ausflußöffnung passirenden Theilchen der

Flüssigkeit schwächer gedrückt werden, und demnach mit geringerer Geschwindigkeit ausströmen, als die durch die unteren Punkte der Ausflußöffnung tretender Theilchen, welche stärker gedrückt werden und mit größerer Geschwindigkeit austreten. Wenn übrigens die größte vertikale Dimension der Ausflußöffnung unbedeutend ist gegen die Tiefe, in welcher sie unter dem Oberspiegel liegt; so wird man ohne merklichen Fehler für die allen Theilen gemeinschaftliche Druckhöhe **Z** den vertikalen Abstand des **Mittelpunktes** der Ausflußöffnung annehmen und hiernach die Geschwindigkeit **V** als eine allen ausströmenden Theilchen gemeinschaftliche Größe ansehen können.

Ist nun endlich die vertikale Dimension der Ausflußöffnung im Vergleich zu der Tiefe dieser Öffnung unter dem Spiegel der Flüssigkeit so beträchtlich, daß man die vorstehende, eine Abkürzung der Rechnung bezweckende Hypothese nicht ohne großen Fehler gelten lassen kann; so wird man durch die nachstehende Betrachtung in den Stande gesetzt, denjenigen Werth der Ausflußgeschwindigkeit **V** zu bestimmen, welchen alle ausströmenden Wassertheilchen gemeinschaftlich besitzen müßten, damit aus der Ausflußöffnung in derselben Zeit eine gleiche Quantität der Flüssigkeit sich ergießen könnte, wie sie es unter den gegebenen Umständen bei der Verschiedenheit der Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Ausflußöffnung wirklich thut. Diesen Werth von **V**, den wir im Nachstehenden mit V_1 bezeichnen wollen, nennt man die **mittlere Ausflußgeschwindigkeit** in der Öffnung Ω.

Die der mittleren Ausflußgeschwindigkeit nach den bekannten Formeln entsprechende Druckhöhe, welche wir mit Z_1 bezeichnen werden, heißt die **mittlere Druckhöhe** für die Öffnung Ω.



Es sei also **AB** die Höhe des Oberspiegels der Flüssigkeit, und zwar ist hierfür, falls sich der Spiegel unmittelbar über der Ausflußöffnung etwas senken und keine horizontale Ebene bilden sollte, die Höhe der am höchsten liegenden Punkte dieses Spiegels zu nehmen; **DGCH** sei die Ausflußöffnung, welche allgemein in einer geneigten Ebene liege. Es bezeichne ferner

und Z″ den vertikalen Abstand ED und EC, in welchem resp. der höchste Punkt D und der tiefste Punkt C der Ausflußöffnung unter dem Spiegel AB liegt,

den vertikalen Abstand EM irgend einer horizontalen Ordinate GH der Ausflußöffnung unter demselben Spiegel,

die Länge dieser Ordinate GH, als Funktion des Abstandes Z, die der Druckhöhe EM = Z entsprechende Ausflußgeschwindigkeit,

den Winkel, welchen die auf der Ebene der Ausflußöffnung in der Richtung der ausströmenden Flüssigkeit errichtete Normale mit der positiven Richtung der Schwere, also mit der nach unten verlängerten Vertikalen einschließt, oder auch den Winkel, welchen die Ebene der Ausflußöffnung mit dem Horizonte bildet,

V_1 die mittlere Ausflußgeschwindigkeit,

Ω die Größe der Ausflußöffnung,

Q das Volum der Flüssigkeit, welches sich in der Zeiteinheit aus der Öffnung Ω ergießen würde, wenn die Geschwindigkeiten aller austretenden Wassertheilchen, obgleich untereinander verschieden, doch von der Zeit plötzlich unabhängig oder konstant würden,

Z_1 die der mittleren Ausflußgeschwindigkeit V_1 zukommende Druckhöhe.

Wenn GH die vertikale Projektion eines horizontalen Elementes der Ausflußöffnung von der unendlich geringen vertikalen Höhe dZ ist, so kann man annehmen, daß in allen Punkten dieses Streifens dieselbe Ausflußgeschwindigkeit V herrscht. Da nun die Oberfläche des gedachten Elementes $\frac{y\,dZ}{\sin\varphi}$ ist; so hat man für das Volum der in Zeiteinheit mit der Geschwindigkeit V aus jenem elementaren Streifen der Ausflußöffnung strömenden Flüssigkeit $\frac{V y\,dZ}{\sin\varphi}$, und demnach für das gesammte Volum der in derselben Zeit mit konstanten Geschwindigkeiten aus der ganzen Ausflußöffnung sich ergießenden Flüssigkeit

$$Q = \frac{1}{\sin\varphi}\int_{Z'}^{Z''} V y\,dZ, \qquad \ldots\ (316)$$

ein Ausdruck, welcher auch gleich ΩV_1 sein muß. Da aber die Größe der Ausflußöffnung

$$\Omega = \frac{1}{\sin\varphi}\int_{Z'}^{Z''} y\,dZ$$

ist; so hat man für die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$V_1 = \frac{1}{\Omega \sin\varphi}\int_{Z'}^{Z''} V y\,dZ = \frac{\int_{Z'}^{Z''} V y\,dZ}{\int_{Z'}^{Z''} y\,dZ} \qquad \ldots\ldots (317)$$

Wenn die Ausflußöffnung Ω im Verhältnisse zu dem oberen Spiegel O' der Flüssigkeit sehr klein ist, sodaß man die in $\frac{\Omega^2}{O'^2}$ multiplizirten Glieder aus den früheren Gleichungen für den Ausfluß der Flüssigkeiten vernachlässigen kann, und wenn außerdem die äußeren Pressungen auf den Oberspiegel und gegen die Ausflußöffnung gleich sind; so kann man nach §. 73 und 72 allgemein

$$V = \sqrt{2gZ} \qquad \text{und} \qquad Z = \frac{V^2}{2g}$$

setzen, was nach den vorstehenden Gleichungen (316) und (317)

$$Q = \frac{\sqrt{2g}}{\sin\varphi}\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{Z}\,dZ \qquad \ldots\ldots (318)$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{2g}}{\Omega \sin\varphi}\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{Z}\,dZ = \frac{2g\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{Z}\,dZ}{\int_{Z'}^{Z''} y\,dZ} \qquad \ldots\ldots (319)$$

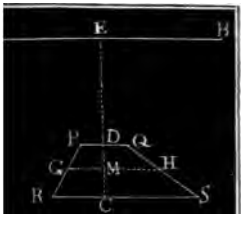
ergibt.

ie der mittleren Geschwindigkeit V_1 nach der Formel $Z=\frac{V^2}{2g}$
nende mittlere Druckhöhe $Z_1=\frac{V_1^2}{2g}$ würde nach Glei-
(319) sein

$$\frac{1}{\Omega^2\sin^2\varphi}\left(\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{\overline{z}}\,dZ\right)^2=\left(\frac{\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{\overline{z}}\,dZ}{\int_{Z'}^{Z''} y\,dZ}\right)^2 \quad \ldots\ldots (320)$$

lus den Formeln (319) und (320) sieht man, daß wenn
rtikale Projektion der Ausflußöffnung gegeben ist, der Nei-
winkel φ der Ebene der Ausflußöffnung gegen den Hori-
us den Werthen für die mittlere Ausflußgeschwin-
eit und für die mittlere Druckhöhe verschwindet, sodaß
gteren beiden Größen für alle diejenigen Ausflußöffnungen
ben sind, deren vertikale Projektion dieselbe ist. Diese
rkung bezieht sich jedoch nicht mit auf die Ausflußmenge Q,
e, wie die Formel (318) zeigt, in demselben Maaße von
Neigung der Ebene der Ausflußöffnung abhängt, wie die
e dieser Öffnung selbst von jener Neigung abhängig ist.

§. 76. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer
ung, welche ein Paralleltrapez bildet, dessen pa-
ele Seiten horizontal sind.



Für diesen Fall, bei welchem, wenn er allgemein gehalten wird, es gleichgültig ist, ob die kleinere parallele Seite der Ausflußöffnung PQRS oben liegt, wie in der ersteren der beiden nebenstehenden Figuren, oder ob die größere parallele Seite oben liegt, wie in der zweiten Figur, sei

a = PQ die Länge der oberen Seite der Öffnung
b = RS die Länge der unteren Seite der Öffnung
c = DC der vertikale Abstand dieser beiden parallelen Seiten,
h = ED + ½DC der vertikale Abstand der Punkte der Öffnung, welche in der Mitte von DC liegen, von dem Oberspiegel AB der Flüssigkeit.

Die Größe der vertikalen Projektion PQRS oder $\Omega \sin\varphi$ ist hier $\frac{1}{2}(a+b)c$.

Ferner ist, wenn EM = Z und GH = y gesetzt wird, sowol in ersterer, wie in letzterer Figur

$$y = a + (b-a)\,\frac{Z-\left(h-\frac{c}{2}\right)}{c},$$

und man hat $Z' = ED = h - \frac{c}{2}$, $Z'' = EC = h + \frac{c}{2}$; mithin

$$\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{Z}\,dZ = \int_{h-\frac{c}{2}}^{h+\frac{c}{2}} \left[a+(b-a)\,\frac{Z-\left(h-\frac{c}{2}\right)}{c}\right]\sqrt{Z}\,dZ.$$

$$= \frac{1}{c}\left\{\tfrac{2}{3}\left[ac-(b-a)\left(h-\tfrac{c}{2}\right)\right]\left[\left(h+\tfrac{c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(h-\tfrac{c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right.$$
$$\left. +\tfrac{2}{5}(b-a)\left[\left(h+\tfrac{c}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\left(h-\tfrac{c}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}$$

oder wenn man den ganzen Ausdruck durch $h^{\frac{5}{2}}$ multiplizirt und dividirt,

$$= \frac{h^{\frac{5}{2}}}{c}\left\{\tfrac{2}{3}\left[\frac{ac}{h}-(b-a)\left(1-\frac{c}{2h}\right)\right]\left[\left(1+\frac{c}{2h}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-\frac{c}{2h}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right.$$
$$\left. +\tfrac{2}{5}(b-a)\left[\left(1+\frac{c}{2h}\right)^{\frac{5}{2}}-\left(1-\frac{c}{2h}\right)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}$$

Da $h = ED + \frac{c}{2}$ ist; so folgt, daß h stets $> \frac{c}{2}$ sein wird, oder höchstens $= \frac{c}{2}$ werden kann, wenn $ED = o$ wäre, d. h. wenn der Spiegel der Flüssigkeit mit der oberen Kante der Ausflußöffnung zusammenfiele. Es wird daher $\frac{c}{2h}$ stets ein echter Bruch oder höchstens $= 1$ sein. In allen Fällen ergibt also eine Entwickelung der Binome $\left(1+\frac{c}{2h}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(1-\frac{c}{2h}\right)^{\frac{3}{2}}, \left(1+\frac{c}{2h}\right)^{\frac{5}{2}}, \left(1-\frac{c}{2h}\right)^{\frac{5}{2}}$ konvergente Reihen, und man erhält, wenn man diese Reihenentwickelung wirklich vornimmt und dabei gleiche und entgegengesetzte Glieder gegeneinander aufhebt,

$$\int_{Z'}^{Z''} y\sqrt{z}\,dZ =$$

$$\frac{h^{\frac{3}{2}}}{c}\left\{\frac{2}{3}\left[\frac{ac}{h} - (b-a)\left(1-\frac{c}{2h}\right)\right]\left[\frac{3}{2}\frac{c}{h} - \frac{1}{64}\left(\frac{c}{h}\right)^3 - \frac{3}{4096}\left(\frac{c}{h}\right)^5 - \text{etc.}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{2}{5}(b-a)\left[\frac{5}{2}\frac{c}{h} + \frac{5}{64}\left(\frac{c}{h}\right)^3 + \frac{3}{4096}\left(\frac{c}{h}\right)^5 + \text{etc.}\right]\right\}$$

Da $\frac{ac}{h} - (b-a)\left(1-\frac{c}{2h}\right) = (a+b)\frac{c}{2h} - (b-a)$ ist; so läßt sich der vorstehende Ausdruck, wenn man alle Glieder vereinigt, welche in $(a+b)$ multiplizirt sind, wie auch die, welche in $(b-a)$ multiplizirt sind, und den allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor $\frac{c}{h}$ zweimal absondert, auf die folgende Form bringen:

$$c\sqrt{h}\left\{\frac{a+b}{2}\left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{c}{h}\right)^2 - \frac{1}{2048}\left(\frac{c}{h}\right)^4 - \text{etc.}\right]\right.$$

$$\left. + (b-a)\left[\frac{1}{24}\frac{c}{h} + \frac{1}{1280}\left(\frac{c}{h}\right)^3 + \text{etc.}\right]\right\}.$$

Da nun hier die Größe der vertikalen Projektion der Ausflußöffnung $\mathfrak{Q}$ d. i. $\mathfrak{Q}\sin\varphi = \frac{1}{2}(a+b)c$ ist; so hat man nach Gl. (319)

für die in der Öffnung Ω stattfindende **mittlere Ausflußgeschwindigkeit**

$$V_1 = \sqrt{2gh}\left\{\left[1-\frac{1}{96}\left(\frac{c}{h}\right)^2-\frac{1}{2048}\left(\frac{c}{h}\right)^4-\text{etc.}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{2(b-a)}{a+b}\left[\frac{1}{24}\frac{c}{h}+\frac{1}{1280}\left(\frac{c}{h}\right)^3+\text{etc.}\right]\right\} \quad \ldots\ (321)$$

Man wird für die Praxis nie nöthig haben, höhere Glieder zu berechnen, als in der vorstehenden Formel aufgenommen sind, selbst dann nicht, wenn h den kleinstmöglichen Werth $h=\frac{c}{2}$, wodurch $\frac{c}{h}=2$ wird, annimmt, in welchem Falle der Spiegel der Flüssigkeit mit der oberen Kante der Ausflußöffnung in derselben Höhe liegt.

Je größer der Werth von h im Vergleich zu c wird, desto mehr kann man von den höheren Potenzen von $\frac{c}{h}$ vernachlässigen. Wenn h gleich c oder etwas größer oder kleiner ist; so kann man schon die 3te und 4te Potenz von $\frac{c}{h}$ vernachlässigen und

$$V_1 = \sqrt{2gh}\left\{1-\frac{1}{96}\left(\frac{c}{h}\right)^2+\frac{(b-a)}{12(a+b)}\frac{c}{h}\right\} \quad \ldots\ (322)$$

setzen.

Wenn $h>2c$ ist, kann man ohne erheblichen Fehler das in $\left(\frac{c}{h}\right)^2$ multiplizirte Glied unterdrücken und

$$V_1 = \sqrt{2gh}\left\{1+\frac{b-a}{12(a+b)}\frac{c}{h}\right\} \quad \ldots\ (323)$$

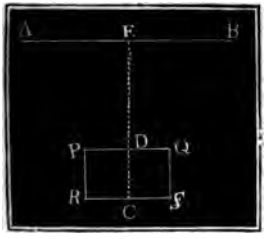
setzen.

Man sieht, daß bei stets wachsendem h auch das in $\frac{c}{h}$ multiplizirte Glied immer kleinere Werthe annimmt, welche endlich gegen die Einheit vernachlässigt werden können, sodaß bei sehr großen Druckhöhen (im Vergleich zu der vertikalen Höhe der Ausflußöffnung) die mittlere Ausflußgeschindigkeit V_1 nahezu

$$V_1 = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ (324)$$

wird, sodaß dieselbe alsdann sehr nahe derjenigen Ausflußgeschwindigkeit gleich wird, welche einer Druckhöhe h vom Spiegel der Flüssigkeit bis zur Mitte des vertikalen Abstandes c der beiden horizontalen Seiten der Ausflußöffnung zukommt.

§. 77. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Rechteck mit zwei horizontal liegenden Seiten bildet.



Wenn hier a die horizontale Dimension $PQ=RS$ der Öffnung, c den vertikalen Abstand DC der beiden horizontalen Seiten und h den vertikalen Abstand des Mittelpunktes der Ausflußöffnung von dem Spiegel der Flüssigkeit bezeichnet; so erhält man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit nach Gl. (321), wenn man darin $b=a$ setzt, also

$$V_1=\sqrt{2gh}\left[1-\frac{1}{96}\left(\frac{c}{h}\right)^2-\frac{1}{2048}\left(\frac{c}{h}\right)^4-\text{etc.}\right] \quad \ldots\ldots (325)$$

Für die mittlere Druckhöhe $Z_1=\frac{V_1^2}{2g}$ hat man hiernach

$$Z_1=h\left[1-\frac{1}{48}\left(\frac{c}{h}\right)^2-\frac{1}{1152}\left(\frac{c}{h}\right)^4-\text{etc.}\right] \quad \ldots\ldots (326)$$

Man braucht auch hier für die Praxis nie zu höheren Gliedern der Reihe hinaufzusteigen, kann vielmehr das in $\left(\frac{c}{h}\right)^4$ und das in $\left(\frac{c}{h}\right)^2$ multiplizirte Glied vernachlässigen, jenachdem die Druckhöhe h über der Mitte der Ausflußöffnung im Vergleich zu c einen größeren Werth erlangt. Die meisten praktischen Fälle sind von der Art, daß $h>2c$ ist und daß man unter dieser Voraussetzung ohne merklichen Fehler

$$V_1=\sqrt{2gh}$$

setzen kann.

Wollte man für den vorliegenden Fall ein ganz strenges Re-

sultat haben; so ergibt sich aus der ersten Formel des §s 76 für $b = a$, wenn man außerdem

$$ED = h - \frac{c}{2} = h'$$

$$EC = h + \frac{c}{2} = h''$$

$$DC = c = h'' - h'$$

setzt,

$$V_1 = \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,\frac{h''^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}}{h'' - h'} \quad \ldots\ldots (326^a)$$

$$Z_1 = \tfrac{4}{9}\left(\frac{h''^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}}{h'' - h'}\right)^2 \quad \ldots\ldots (326^b)$$

§. 78. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Dreieck mit horizontaler Basis bildet, wenn die Spitze des Dreiecks nach oben und die Basis nach unten gekehrt ist.

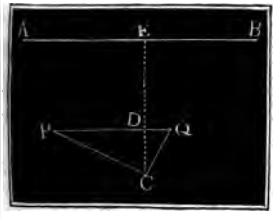
Wenn $b = RS$ die horizontale Basis, $c = DC$ der vertikale Abstand der Spitze des Dreiecks von dessen Basis und h der vertikale Abstand der Mitte von $c = DC$ von dem Oberspiegel AB der Flüssigkeit ist; so erhält man den Werth der mittleren Ausflußgeschwindigkeit aus Gl. (321), wenn man darin $a = o$ setzt, also

$$V_1 = \sqrt{2gh}\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{c}{h}\right) - \frac{1}{96}\left(\frac{c}{h}\right)^2 + \frac{1}{640}\left(\frac{c}{h}\right)^3 - \frac{1}{2048}\left(\frac{c}{h}\right)^4 + \text{etc.}\right], \quad \ldots\ldots (327)$$

ein Ausdruck, in welchem die in höhere Potenzen von $\frac{c}{h}$ multiplizirten Glieder ohne merklichen Fehler dann unterdrückt werden können, wenn h im Vergleich zu c bedeutendere Werthe annimmt.

§. 79. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, welche ein Dreieck mit horizontaler Basis bildet, wenn die Spitze des Dreiecks nach unten und die Basis nach oben gekehrt ist.

Wenn $a = PQ$ die horizontale Basis, $c = DC$ den vertikalen Abstand der Spitze des Dreiecks von dessen Basis und h den vertikalen Abstand der Mitte von $c = DC$ von dem Oberspiegel AB der Flüssigkeit bezeichnet; so ergibt sich die mittlere Ausflußgeschwindigkeit aus Gl. (321), wenn man darin $b = o$ setzt, d. i.

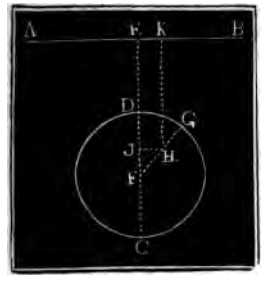


$$V_1 = \sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{c}{h}\right) - \frac{1}{96}\left(\frac{c}{h}\right)^2 - \frac{1}{640}\left(\frac{c}{h}\right)^3 - \frac{1}{2048}\left(\frac{c}{h}\right)^4 - \text{etc.}\right] \quad \ldots . \quad (328)$$

Von diesem Ausdrucke gilt hinsichtlich der in höhere Potenzen von $\frac{c}{h}$ multiplizirten Glieder Dasselbe, was in den vorhergehenden Paragraphen davon bereits bemerklich gemacht ist.

§. 80. Mittlere Ausflußgeschwindigkeit in einer Öffnung, deren vertikale Projektion ein Kreis ist.

Es sei DGC die vertikale kreisförmige Projektion der Ausflußöffnung und es bezeichne



r den Halbmesser FG des Kreises DGC,

h den vertikalen Abstand FE des Mittelpunktes F dieses Kreises von dem oberen Spiegel AB der Flüssigkeit,

$\psi = DFG$ den Winkel, welchen irgend ein Halbmesser FG mit der Linie FE einschließt,

$\varrho = FH$ den Abstand irgend eines Punktes H des Radius FG vom Mittelpunkte F,

$Z = HK$ den vertikalen Abstand des Punktes H vom oberen Spiegel der Flüssigkeit,

φ den Neigungswinkel der Ebene der Ausflußöffnung gegen den Horizont (s. §. 75).

Betrachten wir denjenigen elementaren Theil der Ausflußöffnung, welcher sich bei H projizirt und rechts und links von zwei unmittelbar aufeinander folgenden, um die Winkelgröße $d\psi$ voneinander abstehenden Halbmessern, wie FG, begränzt ist, nach unten und oben jedoch von zwei um F konzentrischen Kreisbögen eingeschlossen wird, die resp. mit den Halbmessern ϱ und $\varrho+d\varrho$ beschrieben sind. Die Projektion dieses Elementes ist gleich $\varrho d\psi . d\varrho$; also die Größe des entsprechenden Elementes der Ausflußöffnung selbst $\frac{\varrho d\psi d\varrho}{\sin\varphi}$, und die Ausflußmenge dafür in der Zeiteinheit $= \frac{V\varrho d\psi d\varrho}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{2gZ}\,\varrho d\psi d\varrho}{\sin\varphi}$, oder da

$$Z = HK = EF - FJ = h - \varrho\cos\psi$$

ist, gleich $\frac{\sqrt{2g}}{\sin\varphi}\cdot\sqrt{h-\varrho\cos\psi}\cdot\varrho d\psi d\varrho = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\varphi}\sqrt{1-\frac{\varrho}{h}\cos\psi}\cdot\varrho d\psi d\varrho$.

Die Ausflußmenge der ganzen Öffnung in der Zeiteinheit ist hiernach

$$Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\varphi}\iint\sqrt{1-\frac{\varrho}{h}\cos\psi}\cdot\varrho d\psi d\varrho.$$

Die Gränzen von ϱ sind hierin offenbar o und r, die von ψ sind o und 2π; wenn man jedoch beachtet, daß dem Elemente H, gegenüber auf der linken Seite der Vertikalen EC, stets ein ähnlich liegendes sich befindet, für welches der Ausdruck der Ausflußmenge ganz derselbe ist, wie für das Element bei H; so leuchtet ein, daß man das vorstehende doppelte Integral nur zweifach zu nehmen und die Integration für ψ nur zwischen den Gränzen o und π auszuführen braucht. Dies ergibt

$$Q = \frac{2\sqrt{2gh}}{\sin\varphi}\int_o^{\pi} d\psi \int_o^{r}\varrho\sqrt{1-\frac{\varrho}{h}\cos\psi}\cdot d\varrho.$$

Da die Größe der Ausflußöffnung $\frac{r^2\pi}{\sin\varphi}$ ist; so folgt für die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2gh}}{\pi r^2} \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{r} \varrho \sqrt{1 - \frac{\varrho}{h}\cos\psi}\, . d\varrho$$

oder wenn man $\sqrt{1 - \frac{\varrho}{h}\cos\psi}$ in die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2}\frac{\varrho}{h}\cos\psi - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2 \cos^2\psi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^3 \cos^3\psi - \tfrac{5}{128}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^4 \cos^4\psi - \text{etc.}$$

entwickelt und alsdann die erste Integration in Beziehung zu ϱ ausführt,

$$V_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi \times$$

$$\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos\psi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 \cos^2\psi - \tfrac{1}{40}\left(\frac{r}{h}\right)^3 \cos^3\psi - \tfrac{5}{384}\left(\frac{r}{h}\right)^4 \cos^4\psi - \text{etc.}\right].$$

Integrirt man jetzt in Beziehung zu ψ, indem man beachtet, daß allgemein $\int_0^{\pi} d\psi \cos^n\psi$ gleich null, wenn n unpaar, und $= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \ldots \frac{n-1}{n}\pi$, wenn n paar ist; so ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit

$$V_1 = \sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \text{etc.}\right] \quad \ldots\ldots (329)$$

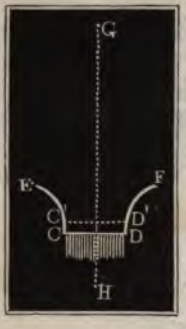
Für die mittlere Druckhöhe $Z_1 = \frac{V_1^2}{2g}$ folgt hieraus

$$Z_1 = h\left[1 - \frac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{9}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \text{etc.}\right] \quad \ldots\ldots (330)$$

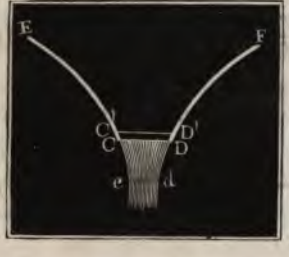
Ausfluß einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit aus einer Öffnung, welche nach innen nicht dergestalt allmählig erweitert ist, daß sämmtliche Theilchen der Flüssigkeit parallel zu einer gemeinschaftlichen Axe austreten können. — Kontraktion des flüssigen Strahles.

§. 81. Kontraktion des flüssigen Strahles.

In sämmtlichen bisher erörterten Fällen, wo der Ausfluß einer Flüssigkeit aus einer Öffnung Ω eines Gefäßes oder einer Röhre betrachtet wurde, ist angenommen, daß die unmittelbar an die eigentliche Öffnung gränzenden oder dieselbe umschließenden Flächenelemente der Gefäßwände einen zylindrischen Streifen CDD'C', wennauch von noch so geringer Höhe CC'=DD', bilden, welcher auf der Ebene CD der Öffnung Ω überall perpendikular stehe, und daß sich von diesem Streifen aus die Gefäßwände CE und DF nach innen allmählig erweitern, sodaß die Flüssigkeit im Stande ist, mit allen ihren Massentheilchen in Ein und derselben auf CD perpendikularen Richtung GH aus der Öffnung Ω herauszutreten.

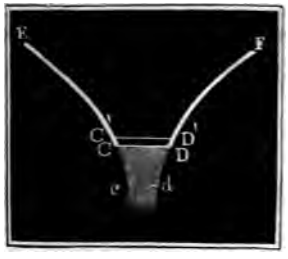


Wird diesen Bedingungen durch die Gestalt der Gefäßwände in der Nähe der Ausflußoffnung kein Genüge geleistet, wäre z. B. die Öffnung Ω=CD eine Öffnung in einer ebenen Wand EF, wie in der nebenstehenden Figur, oder erweiterten sich zwar die Gefäßwände CE und DF von der Öffnung Ω=CD aus nach innen, ohne daß jedoch die Kurven CE und DF bei C und D auf der Ebene der Öffnung CD perpendikular ständen; so darf man sämmtliche früher entwickelte Formeln über den Ausfluß der Flüssigkeiten nur unter Berücksichtigung der nachfolgenden Eigenschaften des ausfließenden Strahles in Anwendung bringen.



Wenn eine in einem Gefäße enthaltene flüssige Masse aus einer Öffnung Ω strömt; so werden die den Gefäßwänden zunächst liegenden Theilchen ein Bestreben haben, den Richtungen dieser Wände zu folgen. Je weiter die Theilchen von den Gefäßwänden abstehen, desto schwächer wird dieses Bestreben sein; dessenungeachtet werden dieselben an einer ganz freien Bewegung

gehindert und gezwungen, den richtenden Einfluß jener Wände bei ihren Bewegungen anzuerkennen. Hierdurch werden die Theilchen der Flüssigkeit Kurven beschreiben, welche sich für die den Gefäßwänden zunächst liegenden Theilchen diesen Wänden möglichst nahe anschließen. In diesen Richtungen werden jene Theilchen denn auch aus der Öffnung Ω heraustreten, und es ist leicht einzusehen, was die Erfahrung genugsam bestätigt, daß bei einer Öffnung CD, wie der seitwärts dargestellten, sämmtliche Theilchen der Flüssigkeit in konvergenten Richtungen aus dem Gefäße treten werden. Dasselbe gilt von den Öffnungen in ebenen Wänden, wie überhaupt von solchen, wobei die nächsten Elemente der umschließenden Gefäßwände auf der Ebene der Ausflußöffnung nicht perpendikular stehen.



Auf solche Öffnungen würde man, selbst wenn die Geschwindigkeit der einzelnen Massentheilchen der Flüssigkeit in der Öffnung CD der vorhin berechneten V gleich wäre (was übrigens auch nicht genau der Fall ist) doch nicht die Formel für die Ausflußmenge Q in der Zeiteinheit in Anwendung bringen können, weil die durch die Öffnung Ω austretenden Theilchen diese Öffnung nicht in Richtungen passiren, welche auf deren Ebene perpendikular stehen.

Nun lehrt aber die Erfahrung, daß die Konvergenz der durch die Öffnung Ω fließenden Massentheilchen in geringer Entfernung von dieser Öffnung ganz aufhört, und daß der flüssige Strahl in dem Querschnitte *cd* in Folge der sich gegenseitig modifizirenden Bewegungen der einzelnen Theilchen eine zylindrische Form annimmt, in welcher sich alle Massentheilchen in Ein und derselben auf CD oder *cd* perpendikular stehenden Richtung fortbewegen.

Die eben betrachtete Erscheinung nennt man die Kontraktion des flüssigen Strahles, und *cd* ist der Querschnitt der größten Kontraktion.

Da nun die Erfahrung gezeigt hat, daß die im Querschnitte *cd* der größten Kontraktion stattfindende Geschwindigkeit der Flüssigkeit gleich der ist, welche die betreffenden Formeln ergeben

würden, wenn man diesen Querschnitt als die Ausflußöffnung ansähe, und daß die Bewegung sämmtlicher Theilchen der Flüssigkeit in diesem Querschnitte der Are des Strahles daselbst parallel ist; so leuchtet ein, daß man sich auch für diese Fälle der früheren Formeln wird bedienen können, sobald man die Größe und die Lage des Querschnittes cd der größten Kontraktion kennt.

Nehmen wir an, die Fläche des Querschnittes cd der größten Kontraktion verhalte sich zu der Fläche Ω der Ausflußöffnung CD, wie $m:1$ oder es sei

$$\text{Querschnitt } cd = m\Omega;$$

so heißt m der Kontraktionskoeffizient, welcher natürlich für verschiedene Arten von Ausflußöffnungen einen verschiedenen Werth hat.

Außerdem werde der für verschiedene Umstände gleichfalls veränderliche Abstand des Querschnittes cd der größten Kontraktion von der Ausflußöffnung CD mit λ bezeichnet.

Wenn sich die Öffnung Ω in einer sehr dünnen ebenen Wand befindet; so nennt man die durch diese Öffnung hervorgebrachte Zusammerziehung des ausfließenden Strahles eine vollkommene Kontraktion. Unvollkommen heißt diese Kontraktion in jedem anderen Falle, wo sich die Wände des Gefäßes von der Ausflußöffnung ab zwar nach innen allmählig erweitern, aber doch keine solche Form annehmen, bei welcher alle Massentheilchen der Flüssigkeit parallel zu einer gemeinschaftlichen Are austreten können und gar keine Kontraktion stattfindet.

§. 82. Versuche, die Größe der vollkommenen Kontraktion aus theoretischen Betrachtungen abzuleiten.

Es ist schon angeführt, daß die in dem Querschnitte der größten Kontraktion stattfindende Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit, praktischen Untersuchungen zufolge, sehr nahe gleich der ist, welche die früheren Formeln ergeben, wenn man darin den Querschnitt der größten Kontraktion als Ausflußöffnung ansieht. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit mit V und beachtet, daß wenn Ω die Größe der wirklichen Ausflußöffnung ist, die

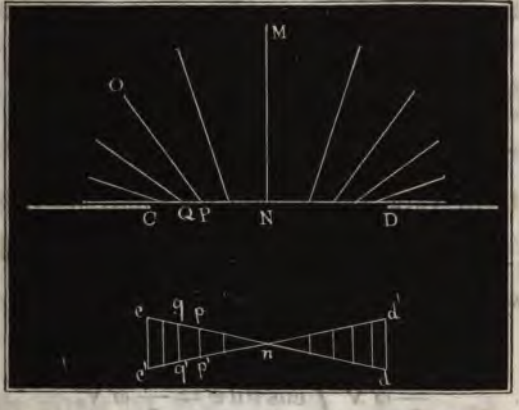
ge des Querschnittes der größten Kontraktion gleich $m\Omega$ sein
; so folgt, daß die Ausflußmenge für jede Zeiteinheit durch

$$Q = m\Omega V$$

estellt ist.

Wenn die Kontraktion vollkommen ist, wenn sich die Ausfluß-
ung also in einer dünnen ebenen Wand befindet; so schwankt
Werth des Koeffizienten m für die meisten in der Praxis
ommenden Fälle wenig um die Zahl 0,61. Man hat auf
chiedene Weise versucht, dieses Resultat durch theoretische
rachtungen zu erzielen, von denen wir im Nachstehenden einige
er erläutern und hinsichtlich ihrer Haltbarkeit prüfen wollen.

Navier*) schlägt folgenden Weg ein. Wenn die Ausfluß-
ung horizontal angenommen wird; so sei MN die vertikale
n die horizontale Projektion der Axe dieser Öffnung. Man
ke sich durch diese Axe eine unendliche Menge Vertikalebenen



egt; CD stelle in vertikaler Projektion den Durchschnitt der
ene der Ausflußöffnung mit Einer dieser Ebenen dar, und
c', dnd' in horizontaler Projektion den Theil der Ebene der
sflußöffnung, welcher zwischen zweien jener sehr benachbarten
enen liegt. Man nehme ferner an, die Fläche $cc'nd'd$ sei in
e unendliche Anzahl Theile, wie $pqq'p'$, getheilt, deren Flä-

*) Résumé des leçons sur l'application de la mécanique. Seconde partie. No. 53.

chen einander gleich ſeien, und welche als die Durchſchnitte von ebenſo viel Fäden der Flüſſigkeit mit der Ebene der Ausflußöffnung angeſehen werden können. Endlich werde zugeſtanden, daß die einzelnen Richtungen dieſer Fäden ſolche Neigungen haben, daß wenn man zu jeder der Richtungen eine Parallele durch den Punkt N zöge, der vertikale Halbkreis, deſſen Mittelpunkt N iſt, durch dieſe Parallelen in lauter gleiche Theile getheilt würde.

Bezeichnet man nun mit V die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit der Fäden in den Punkten, wo ſie die Ebene der Ausflußöffnung durchſcheiden, und mit ψ den Winkel, welchen die Richtung OP irgend Eines dieſer Fäden mit der Axe MN einſchließt; ſo hat man $V\cos\psi$ für die Geſchwindigkeit des Fadens in perpendikularer Richtung zu der Ebene der Ausflußöffnung. Jetzt ſei die Fläche $npp'=\omega$, $pp'q'q=d\omega$, $ncc'=\omega'$; alsdann wird die Menge der Flüſſigkeit, welche ſich in der Zeiteinheit durch das Flächenelement $pp'q'q=d\omega$ in perpendikularer Richtung zu der Ausflußöffnung ergießt, $V\cos\psi\, d\omega$ ſein. Da man nach der angenommenen Hypotheſe über die Richtung der einzelnen Fäden OP der Flüſſigkeit $\omega:\omega'=\psi:\frac{\pi}{2}$, alſo $\omega=\frac{2}{\pi}\omega'\psi$, und daher $d\omega=\frac{2}{\pi}\omega' d\psi$ hat; ſo wird der Ausdruck für die in der Zeiteinheit durch das Element $d\omega$ entſtrömende Flüſſigkeitsmenge $\frac{2}{\pi}\omega' V\cos\psi\, d\psi$, und hiernach für die Ausflußmenge des Theiles ncc' der ganzen Öffnung

$$\frac{2}{\pi}\omega' V\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\, d\psi=\frac{2}{\pi}\omega' V.$$

Da Dies von einem jeden ähnlichen dreieckigen Theile, wie $ncc'=\omega'$, der Ausflußöffnung gilt; ſo erkennt man leicht, daß daſſelbe auf die ganze Ausflußöffnung Ω Anwendung findet, und daß man daher für die geſuchte Ausflußmenge

$$Q=\frac{2}{\pi}\Omega V=0{,}637\,\Omega V$$

ſetzen könne.

So nahe nun auch dieses Resultat mit den Ergebnissen der praktischen Untersuchungen übereinstimmt; so weit sind doch die dabei gemachten Voraussetzungen von den Vorgängen in der Wirklichkeit verschieden. Es ist eine ganz willkürliche Hypothese, daß die Richtungen der durch die Elemente $pp'q'q$ tretenden Fäden der Flüssigkeit, wenn sie parallel an den Punkt N getragen werden, lauter gleiche Winkel miteinander einschließen sollen. Es würde hieraus folgen, daß die längs der Gefäßwände herbei fließenden Theilchen in den Richtungen CN und DN austräten, und daß mithin der ausfließende Strahl eine krumme Oberfläche besäße, welche die Gefäßwände rings um die Ausflußöffnung tangirte, was jedoch durch die Erfahrung keineswegs bestätigt wird, indem die Oberfläche dieses Strahles unter scharfen Neigungswinkeln gegen die Gefäßwände aus der Öffnung heraustritt.

Ebenso irrig ist die Hypothese, daß die allen Fäden in der Öffnung CD gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach den respektiven Richtungen OP gleich der Geschwindigkeit V sei, welche die Formeln für die jener Öffnung entsprechende Druckhöhe ergeben würden. Diese durch die Formeln zu bestimmende Geschwindigkeit V herrscht, wie schon früher bemerkt, gemachten Erfahrungen zufolge in dem Querschnitte der größten Kontraktion wirklich. Denkt man sich nun die Flüssigkeit in lauter Fäden zerlegt; so werden die Querschnitte dieser Fäden von dem Querschnitte der größten Kontraktion an aufwärts immer größer werden, weil die höheren Querschnitte des Strahles immer größer werden. Demzufolge wird die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in allen höheren Querschnitten verhältnißmäßig geringer sein, da durch alle Querschnitte Ein und desselben Fadens in derselben Zeit dieselbe Menge der Flüssigkeit sich bewegen muß. Hieraus folgt, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in den einzelnen Fäden beim Passiren der Öffnung CD kleiner sein wird, als der aus den Formeln gefundene Werth von V, und zwar ist dieser Unterschied nicht etwa unbedeutend, sondern von sehr bemerkenswerthen Belange, wenn man beachtet, daß der Querschnitt der größten Kontraktion nur etwa 0,61 von der Größe der wirklichen Ausflußöffnung beträgt.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß das näherungsweise Zusammentreffen des von Navier gefundenen theoretischen Resul-

tates mit den wirklichen Erscheinungen der Kontraktion rein zufällig ist, und daß man die betreffenden Betrachtungen nicht als eine wissenschaftliche Erläuterung jenes Pänomenens ansehen könne.

Der Geh. Oberbauraty Hagen*) hat sich folgender Methode bedient, um daraus das Wesen der Kontraktion des Strahles abzuleit. Derselbe nimmt an, daß in der Ausflußöffnung die Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit nach dem Rande zu wegen des hemmenden Einflusses der Gefäßwände schwächer sei, als in der Mitte dieser Öffnung, wo der Druck noch durch das Zusammentreten der daselbst konvergirenden Fäden der Flüssigkeit vermehrt werde. Es wird ferner vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit, welche unmittelbar den Rand der Ausflußöffnung berühren, gleich null sei, und daß diese Geschwindigkeit nach der Mitte zu proportional mit der Entfernung vom Rande der Öffnung zunehme. Im Querschnitte der größten Kontraktion würden sich diese verschiedenen Geschwindigkeiten ausgeglichen und den Werth von V angenommen haben, welcher sich aus den früheren Formeln hierfür ergibt.

Denken wir uns hiernach die Ausflußöffnung Ω als kreisförmig vom Halbmesser R, bezeichnen die Geschwindigkeit des Fadens in der Mitte der Ausflußöffnung mit v, die Menge der Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit ausfließt, mit Q, die lebende Kraft derselben mit L, den Halbmesser des Querschnittes der größten Kontraktion mit r und die in diesem Querschnitte stattfindende gemeinschaftliche Geschwindigkeit mit V; so wird die in einem Abstande $=\varrho$ von dem Rande der Ausflußöffnung stattfindende Geschwindigkeit $u=\frac{\varrho}{R}v$ sein.

Für einen sehr schmalen Ring von der Breite $d\varrho$ im Abstande ϱ vom Rande der Öffnung hat man also als Ausflußmenge

$$dQ=2\pi(R-\varrho)d\varrho.u=2\pi(R-\varrho)\frac{\varrho}{R}vd\varrho$$

*) Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil. S. 192 ff.

und als lebende Kraft, wenn w das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet,

$$dL = \frac{2\pi w}{g}(R-\varrho)d\varrho.u^2 = \frac{2\pi w}{g}(R-\varrho)\frac{\varrho^2}{R^2}v^2 d\varrho.$$

Eine Integration dieser Ausdrücke zwischen den Gränzen o und R für ϱ ergibt

$$Q = \frac{1}{3}\pi R^2 v,$$

$$L = \frac{1}{10}\frac{w}{g}\pi R^2 v^2.$$

Nachdem die Ausgleichung der Geschwindigkeiten im Querschnitte der größten Kontraktion erfolgt ist, hat man für diesen Querschnitt

$$Q = \pi r^2 V,$$

$$L = \frac{w}{g}\pi r^2 V^2.$$

Setzt man diese beiden Werthe für Q und L resp. einander gleich; so findet man

$$V = v\sqrt{0{,}3}$$

$$r^2 = 0{,}6086 R^2$$

oder auch, da $\pi R^2 = \Omega$ ist,

$$Q = 0{,}6086\,\Omega V.$$

Dieses Resultat stimmt mit den praktischen Erfahrungen noch besser überein, als das von Navier erhaltene; nichtsdestoweniger beruhet es auf ebenso willkürlichen Voraussetzungen. Die Hypothese, daß die Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit am Rande der Öffnung null sei, wird durch die Erfahrung nicht bestätigt, auch liegt kein innerer Grund vor, warum die Geschwindigkeit von dem Rande nach der Mitte der Öffnung proportional zu der Entfernung von diesem Rande wachsen solle.

Denkt man sich die verschiedenen Fäden oder Kanäle, in welchen die Flüssigkeit ausströmt, indem man beachtet, daß die Geschwindigkeiten derselben im Querschnitte der größten Kontraktion sich sämmtlich ausgeglichen haben sollen; so würde aus der vor-

tates mit den wirklichen Erscheinungen der Kontraktion rein zufällig ist, und daß man die betreffenden Betrachtungen nicht als eine wissenschaftliche Erläuterung jenes Pänomenens ansehen könne.

Der Geh. Oberbaurath Hagen*) hat sich folgender Methode bedient, um daraus das Wesen der Kontraktion des Strahles abzuleit. Derselbe nimmt an, daß in der Ausflußöffnung die Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit nach dem Rande zu wegen des hemmenden Einflusses der Gefäßwände schwächer sei, als in der Mitte dieser Öffnung, wo der Druck noch durch das Zusammentreten der daselbst konvergirenden Fäden der Flüssigkeit vermehrt werde. Es wird ferner vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit, welche unmittelbar den Rand der Ausflußöffnung berühren, gleich null sei, und daß diese Geschwindigkeit nach der Mitte zu proportional mit der Entfernung vom Rande der Öffnung zunehme. Im Querschnitte der größten Kontraktion würden sich diese verschiedenen Geschwindigkeiten ausgeglichen und den Werth von V angenommen haben, welcher sich aus den früheren Formeln hierfür ergibt.

Denken wir uns hiernach die Ausflußöffnung Ω als kreisförmig vom Halbmesser R, bezeichnen die Geschwindigkeit des Fadens in der Mitte der Ausflußöffnung mit v, die Menge der Flüssigkeit, welche in der Zeiteinheit ausfließt, mit Q, die lebende Kraft derselben mit L, den Halbmesser des Querschnittes der größten Kontraktion mit r und die in diesem Querschnitte stattfindende gemeinschaftliche Geschwindigkeit mit V; so wird die in einem Abstande $= \varrho$ von dem Rande der Ausflußöffnung stattfindende Geschwindigkeit $u = \frac{\varrho}{R} v$ sein.

Für einen sehr schmalen Ring von der Breite $d\varrho$ im Abstande ϱ vom Rande der Öffnung hat man also als Ausflußmenge

$$dQ = 2\pi(R-\varrho)d\varrho . u = 2\pi(R-\varrho)\frac{\varrho}{R} v d\varrho$$

*) Handbuch der Wasserbaukunst. Erster Theil. S. 192 ff.

und als lebende Kraft, wenn w das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet,

$$dL = \frac{2\pi w}{g}(R-\varrho)d\varrho.u^2 = \frac{2\pi w}{g}(R-\varrho)\frac{\varrho^2}{R^2}v^2 d\varrho.$$

Eine Integration dieser Ausdrücke zwischen den Gränzen o und R für ϱ ergibt

$$Q = \frac{1}{3}\pi R^2 v,$$

$$L = \frac{1}{10}\frac{w}{g}\pi R^2 v^2.$$

Nachdem die Ausgleichung der Geschwindigkeiten im Querschnitte der größten Kontraktion erfolgt ist, hat man für diesen Querschnitt

$$Q = \pi r^2 V,$$

$$L = \frac{w}{g}\pi r^2 V^2.$$

Setzt man diese beiden Werthe für Q und L resp. einander gleich; so findet man

$$V = v\sqrt{0{,}3}$$

$$r^2 = 0{,}6086\,R^2$$

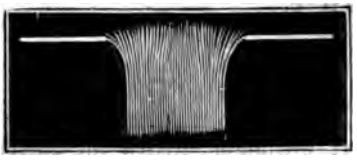
oder auch, da $\pi R^2 = \Omega$ ist,

$$Q = 0{,}6086\,\Omega V.$$

Dieses Resultat stimmt mit den praktischen Erfahrungen noch besser überein, als das von Navier erhaltene; nichtsdestoweniger beruhet es auf ebenso willkürlichen Voraussetzungen. Die Hypothese, daß die Geschwindigkeit der Theilchen der Flüssigkeit am Rande der Öffnung null sei, wird durch die Erfahrung nicht bestätigt, auch liegt kein innerer Grund vor, warum die Geschwindigkeit von dem Rande nach der Mitte der Öffnung proportional zu der Entfernung von diesem Rande wachsen solle.

Denkt man sich die verschiedenen Fäden oder Kanäle, in welchen die Flüssigkeit ausströmt, indem man beachtet, daß die Geschwindigkeiten derselben im Querschnitte der größten Kontraktion sich sämmtlich ausgeglichen haben sollen; so würde aus der vor-

stehenden Hypotheſe folgen, daß ſich die Querſchnitte der in der Nähe des Randes der Öffnung liegenden Fäden vom Querſchnitte der größten Kontraktion an aufwärts *vergrößerten*, während ſich die Querſchnitte der in der Nähe der Mitte der Öffnung liegenden Fäden *verkleinerten*, da die Geſchwindigkeit in den erſteren Fäden nach oben abnehmen und in den letzteren nach oben zunehmen müßte. Auch dieſe Folgerung widerſpricht der Erfahrung, wie man ſich leicht überzeugen kann, wenn man die ausſtrömende Flüſſigkeit mit leichten ſichtbar ſchwimmenden Körperchen vermiſcht, welche beim Ausfließen keineswegs die mittleren Richtungen der in ſeitſtehender Figur angedeuteten Linien einſchlagen werden.



Demnach kann auch die nahe Übereinſtimmung des Reſultates der Hagenſchen Betrachtung mit dem wirklichen Effekte der Kontraktion des Strahles nur als ein zufälliges Zuſammentreffen angeſehen werden, ohne daß durch das geführte Raiſonnement der Gegenſtand wiſſenſchaftlich aufgeklärt wäre.

Nach dem bisher Vorgetragenen hat man alſo die Kontraktion des Strahles als eine aus dem Weſen der Flüſſigkeiten hervorgehende Erſcheinung beim Ausfluſſe derſelben aus Gefäßen mit mangelhaft erweiterten Öffnungen anzuſehen, welche eine genügende Erklärung aus den dynamiſchen Prinzipien, die den Bewegungen der Flüſſigkeiten zu Grunde liegen, noch nicht gefunden hat. Aus der Natur der Flüſſigkeiten, welche wegen der ungemein leichten Verſchieblichkeit aller Theile derſelben das Beſtreben dieſer Theile hervorruft, in allen Richtungen gegen die Ausflußöffnung einzudringen, erklärt ſich wol die Erſcheinung der Kontraktion des ausfließenden Strahles im Allgemeinen, jedoch fehlt noch viel, um daraus die *Größe* der Kontraktion und die *Form* des kontrahirten Strahles abzuleiten.

Zur richtigen Anwendung der früher entwickelten Formeln für den Ausfluß von Flüſſigkeiten aus Gefäßen genügt es, wenn man weiß, daß dieſe Formeln ohne Weiteres benutzt werden können, ſobald man den Theil des ausfließenden Strahles von der eigentlichen Öffnung Ω im Gefäße bis zum Querſchnitte

$m\Omega$ der größten Kontraktion als mit zum Gefäße gehörig betrachtet, wie wenn die krumme Oberfläche dieses Theiles des Strahles noch einen Theil der Gefäßwand bildete. Der Querschnitt $m\Omega$ der größten Kontraktion tritt alsdann in jene Formeln, wie die wahre Ausflußöffnung des Gefäßes ein, während die eigentliche Öffnung Ω des Gefäßes ganz und gar den Charakter einer Ausflußöffnung verliert, und wie ein jeder andere höher liegende Querschnitt des Gefäßes zu behandeln ist.

§. 83. Formeln für den Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße unter Berücksichtigung der Kontraktion des Strahles.

Es sei

m der Kontraktionskoeffizient, d. h. das Verhältniß des Querschnittes der größten Kontraktion zu der Fläche der Ausflußöffnung Ω,

λ der Abstand des Querschnittes der größten Kontraktion von der Ausflußöffnung,

φ der Winkel, welchen die Axe des ausfließenden Strahles mit der abwärts gekehrten Richtung der Schwere in der Ausflußöffnung einschließt (s. §. 75).

Im Übrigen werden die früheren Beziehungen beibehalten.

Es ist schon in den vorhergehenden Paragraphen bemerkt, daß wenn auf die Wirkung der Kontraktion des Strahles bei dem Ausflusse einer Flüssigkeit aus einem Gefäße gehörig Rücksicht genommen werden soll, man den Theil des freien Strahles bis zum Querschnitte der größten Kontraktion, als zum Gefäße gehörig, und den letzteren Querschnitt von der Größe $m\Omega$ als eigentliche Ausflußöffnung zu betrachten habe.

Hierdurch würde man nun, wenn Z die Druckhöhe vom Spiegel der Flüssigkeit bis zum Mittelpunkte der wahren Öffnung Ω bezeichnete, diese Höhe um $\lambda\cos\varphi$ vermehren müssen, damit $Z+\lambda\cos\varphi$ die Druckhöhe über dem Querschnitte $m\Omega$ der größten Kontraktion darstellte. Dies und die Substitution von $m\Omega$ für Ω würde in dem Falle, wo es sich um ein beständig voll erhaltenes Gefäß handelte, nach Gl. (298) für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Querschnitte der größten Kontraktion

$$V=\sqrt{\frac{2g\left(Z+\lambda\cos\varphi+\frac{p'-p''}{w}\right)}{1-\frac{m^2\Omega^2}{O'^2}}} \quad \ldots\ldots (331)$$

ergeben.

Wenn sich die Ausflußöffnung in einer vertikalen Wand befindet, wenn also $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ist; so fällt das Glied $\lambda\cos\varphi$ ganz weg, und die Druckhöhe Z bleibt ungeändert. Wenn die Öffnung horizontal ist, wird $\lambda\cos\varphi=\lambda$ sobald der Strahl vertikal nach unten ausfließt, weil alsdann $\varphi=0$ ist, und es wird $\lambda\cos\varphi=-\lambda$, sobald der Strahl vertikal nach oben ausfließt, weil alsdann $\varphi=\pi$ ist. In den allermeisten Fällen, wo die Größe λ, und noch vielmehr die Größe $\lambda\cos\varphi$, gegen die Druckhöhe Z über der Öffnung Ω sehr klein ist, wird man die Veränderung jener Druckhöhe um die Höhe $\lambda\cos\varphi$ ganz unbeachtet lassen können.

Wenn die äußeren Pressungen p' und p'' einander gleich sind, wird

$$V=\sqrt{\frac{2g\,(Z+\lambda\cos\varphi)}{1-\frac{m^2\Omega^2}{O'^2}}} \quad \ldots\ldots (332)$$

Für den Fall jedoch, wo die Öffnung Ω im Vergleich zu der Fläche des oberen Spiegels O' der Flüssigkeit sehr klein ist, sodaß man die Größe $\frac{m^2\Omega^2}{O'^2}$ gegen die Einheit vernachlässigen kann, hat man

$$V=\sqrt{2g\,(Z+\lambda\cos\varphi)}, \quad \ldots\ldots (333)$$

und wenn auch $\lambda\cos\varphi$ gegen Z verschwindend klein ist,

$$V=\sqrt{2gZ} \quad \ldots\ldots (334)$$

Die Ausflußmenge für die Zeiteinheit ist hier

$$Q=m\Omega V \quad \ldots\ldots (335)$$

Der hydraulische Druck p in irgend einem Punkte der Flüssigkeit würde unter den bei Gl. (304) gemachten Voraussetzun-

$$p = p' + wz - [w(Z + \lambda\cos\varphi) + (p' - p'')]\frac{\frac{O'^2}{\omega^2} - 1}{\frac{O'^2}{m^2\Omega^2} - 1} \quad \ldots\ldots (336)$$

oder für $p' = p''$

$$p = p' + wz - w(Z + \lambda\cos\varphi)\frac{\frac{O'^2}{\omega^2} - 1}{\frac{O'^2}{m^2\Omega^2} - 1} \quad \ldots\ldots (337)$$

ſein.

Wenn die Ausflußöffnung Ω gegen die Fläche des oberen Spiegels O' ſehr klein wäre, würde man, wie in Gl. (306),

$$p = p' + wz \quad \ldots\ldots (338)$$

ſetzen können.

Die Reſultate des §s 74 für den Ausfluß einer Flüſſigkeit aus einem Gefäße, welches ſich allmählig leert, unter der Vorausſetzung, daß die Ausflußöffnung gegen alle übrigen Querſchnitte der Röhre ungemein klein ſei, behalten auch unter Subſtitution von $m\Omega$ für Ω und $Z + \lambda\cos\varphi$ für Z dann noch näherungsweiſe Richtigkeit, wenn bei dem Ausfluſſe Kontraktion des Strahles ſtattfindet, wenn man die kleinen Fehler überſieht, welche man begeht, wenn man annimmt, daß ſich die Größe und Form der Kontraktion mit der veränderlichen Druckhöhe Z nicht ändern, was allerdings in gewiſſem Maaße der Fall iſt. Die Zeit, welche ein mit Kontraktion des Strahles ſich leerendes Gefäß nöthig hat, um ganz auszufließen, wird alſo nahezu doppelt ſo groß ſein, als die Zeit, in welcher ſich ein gleich großes Volum der Flüſſigkeit bei der anfänglichen konſtant erhaltenen Druckhöhe aus demſelben Gefäße und derſelben Ausflußöffnung ergießen kann.

Wenn die Ausflußöffnung im Vergleich zu der Druckhöhe ſo bedeutende Dimenſionen hat, daß man zur Beſtimmung der mittleren Ausflußgeſchwindigkeit nicht mehr ohne merklichen Fehler den Abſtand des Mittelpunktes dieſer Öffnung von dem Spiegel der Flüſſigkeit als Druckhöhe Z annehmen kann, und ſich deshalb der in §. 75 bis 80 entwickelten Formeln für jene mittlere Ausflußgeſchwindigkeit bedienen muß; ſo wird man auch bei ſtattfindender Kontraktion des Strahles in den meiſten Fällen ohne

erheblichen Fehler die Werthe für V_1 aus jenen Formeln für die mittlere Ausflußgeschwindigkeit in dem Querschnitte $m\Omega$ der größten Kontraktion annehmen können, besonders, wenn man darin für h die Größe $h+\lambda\cos\varphi$ setzte, falls Dies erforderlich erscheinen sollte. Die Ausflußmenge in der Zeiteinheit würde alsdann immer

$$Q = m\Omega V_1 \qquad \ldots\ (339)$$

sein.

§. 84. Praktische Erfahrungen über die Größe und Wirkung der vollständigen Kontraktion bei Öffnungen in sehr dünnen Wänden und bei verschiedenen Druckhöhen.

Wenn die Kontraktion des ausfließenden Strahles vollkommen sein soll, ist es erforderlich, 1) daß sich die Ausflußöffnung in einer sehr dünnen Wand befinde, sodaß sich der Strahl nicht an die innere Wanddicke, welche die Öffnung umgibt, anlegen könne, vielmehr nur ringsherum eine scharfe Kante berührt; 2) daß die Wand an der Stelle, wo sich die Ausflußöffnung befindet, eben sei; 3) daß die Ausflußöffnung von den übrigen Seitenwänden und von dem Boden des Gefäßes möglichst weit und wenigstens um das $1\frac{1}{2}$ bis 2fache ihrer kleinsten Dimension entfernt sei.

Wenn die Gefäßwand um die Ausflußöffnung herum keine Ebene bildet, sondern sich gegen diese Öffnung hin neigt, wie in seitstehender Figur, oder wenn sich die Seitenwände des Gefäßes oder der Boden in geringerer Entfernung, als der eben genannten, befinden; so wird dadurch die Kontraktion vermindert werden: neigt sich jedoch die Gefäßwand um die Ausflußöffnung herum dieser Öffnung entgegen, wie in der seitstehenden Figur; so wird dadurch die vollkommene Kontraktion, wie sie für Öffnungen in ebenen Wänden stattfindet, noch etwas vermehrt.

Außerdem vermehrt sich die Kontraktion, d. h. der Werth des Koeffizienten m wird kleiner, je größer die Druckhöhe wird, besonders, wenn die Druckhöhen nicht mehr ganz unbedeutend sind.

Auch hat man gefunden, daß die Kontraktion desto geringer, oder daß der Werth von m desto größer wird, je kleiner der Durchmesser der Ausflußöffnung ist.

Was den Abstand λ des Querschnittes der größten Kontraktion von der Ausflußöffnung betrifft; so ist derselbe bei vollkommener Kontraktion für nicht zu kleine Öffnungen in sehr dünnen und ebenen Wänden sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ des kleinsten Durchmessers der Ausflußöffnung anzunehmen: dieser Abstand wächst bei sehr kleinen Öffnungen bis zu der Größe dieses Durchmessers selbst.

Die Form der Ausflußöffnung, sowie die Richtung ihrer Ebene haben keinen wesentlichen Einfluß auf die vorstehenden Resultate, sodaß man rechtwinklige und runde Öffnungen in vertikalen, horizontalen oder geneigten ebenen Wänden hinsichtlich der durch sie hervorgebrachten Kontraktion als gleichbedeutend ansehen kann.

Wenn h die Druckhöhe über der Mitte der Ausflußöffnung Ω bezeichnet; so wird, wenn man die Ausflußgeschwindigkeit V stets nach der abgekürzten Formel

$$V = \sqrt{2gh} \qquad \ldots\ (340)$$

berechnet, der Werth dieses Ausdruckes nicht immer genau die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit darstellen, und zwar werden die nach dieser Formel berechneten Werthe um so weniger von den wahren verschieden sein, je größer die Druckhöhe im Vergleich zu der Höhe der Öffnung ist, und um so mehr, je kleiner die Druckhöhe im Vergleich zu dieser Öffnung ist (vergl. §. 77). Setzt man also das Verhältniß der wahren mittleren Ausflußgeschwindigkeit zu dem nach Formel (340) berechneten Werthe gleich n; so wird die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit, welche mit V_1 bezeichnet werde,

$$V_1 = nV = n\sqrt{2gh} \qquad \ldots\ (341)$$

sein. Den Faktor n kann man den Geschwindigkeitskoeffizienten nennen.

Da nun gleichzeitig das Verhältniß des Querschnittes der größten Kontraktion zur Ausflußöffnung gleich m, also jener Querschnitt der größten Kontraktion gleich $m\Omega$ ist; so würde

man für die in jeder Sekunde aus der Öffnung Ω sich ergießende wirkliche Ausflußmenge

$$Q = m\,\Omega V_1 = m n \Omega \sqrt{2gh}, \quad \ldots . \quad (342)$$

oder wenn man das Produkt mn mit α bezeichnete,

$$Q = \alpha \Omega \sqrt{2gh} \quad \ldots . \quad (343)$$

haben.

Diesen Koeffizienten α, welcher sowol von der Abweichung der wirklichen Ausflußgeschwindigkeit von dem nach Formel (340) berechneten Werthe, wie auch von der Größe der Kontraktion des Strahles abhängt, nennt man den Ausflußkoeffizienten. Die Größe $\Omega\sqrt{2gh}$ heißt die theoretische oder hypothetische Ausflußmenge, während $\alpha\Omega\sqrt{2gh}$ die wirkliche oder effektive Ausflußmenge genannt wird.

Es muß nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, daß schon bei einigermaßen beträchtlichen Druckhöhen die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit V_1 nur sehr wenig von der nach Formel (340) berechneten abweicht, sodaß für dergleichen Druckhöhen der Koeffizient n nahezu $= 1$ und der Ausflußkoeffizient α gleich dem Kontraktionskoeffizienten m wird.

Nach den Versuchen von Poncelet und Lesbros*) kann man die Werthe des Ausflußkoeffizienten α bei vollständiger Kontraktion und bei dem Ausflusse des Wassers aus rechtwinkligen Öffnungen in sehr dünnen vertikalen Wänden je nach der Größe der Druckhöhe und der vertikalen Höhe der Ausflußöffnung aus folgenden beiden Tabellen entnehmen, wobei behuf Berechnung der entsprechenden Ausflußmenge die Formel (343) zu Grunde gelegt werden muß.

Von da an, wo die Druckhöhe über dem oberen Rande der Öffnung der Höhe dieser Öffnung etwa gleich, oder wo die Druckhöhe h über der Mitte der Öffnung $= \frac{3}{2}$ der Höhe derselben wird, kann man annehmen, daß die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit vollkommen gleich der nach Formel (340) berechneten, daß also $n = 1$ und die in den Tafeln enthaltenen Werthe für den Ausflußkoeffizienten α auch gleich dem Kontraktionskoeffizienten m seien.

*) Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau.

Tafel der Ausflußkoeffizienten

für rechtwinklige Öffnungen in dünnen vertikalen Wänden, bei vollständiger Kontraktion und Ausfluß des Wassers in die freie Luft, wenn die Druckhöhen in einem Punkte des Behälters gemessen sind, wo das Wasser vollkommen ruhig ist.

Druckhöhe über dem oberen Rande der Öffnung. (Fuß)	Werth des Ausflußkoeffizienten α für folgende Höhen der Öffnung:					
	0,637′	0,319′	0,159′	0,096′	0,064′	0,032′
0,000	»	»	»	»	»	»
0,016	»	»	»	»	»	0,705
0,032	»	»	0,607	0,630	0,660	0,701
0,048	»	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,064	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,096	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,127	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,159	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,191	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,223	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,255	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,287	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,319	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,382	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,446	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,510	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,574	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,637	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,797	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,956	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
1,274	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647
1,593	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
1,912	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
2,230	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
2,549	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
2,868	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
3,186	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
3,505	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
3,823	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
4,142	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
4,461	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
4,779	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
5,098	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
5,417	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
5,735	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
6,054	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
6,372	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611
9,559	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Tafel der Ausflußkoeffizienten

für rechtwinklige Öffnungen in dünnen vertikalen Wänden, bei vollständiger Kontraktion und Ausfluß des Wassers in die freie Luft, wenn die Druckhöhen unmittelbar über der Öffnung gemessen sind.

Druckhöhe über dem oberen Rande der Öffnung. (Fuß.)	Werth des Ausflußkoeffizienten α für folgende Höhen der Öffnung:					
	0,637′	0,319′	0,159′	0,096′	0,064′	0,032′
0,000	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,016	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,032	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,048	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,064	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,096	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,127	0,593	0,612	0,636	9,654	0,678	0,695
0,159	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,191	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,223	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,255	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,287	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,319	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,382	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,446	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,510	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,574	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657
0,637	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,797	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,956	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
1,274	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647
1,593	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
1,910	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643
2,232	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
2,549	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
2,868	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
3,186	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
3,505	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
3,823	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
4,142	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
4,461	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
4,779	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
5,098	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
5,417	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
5,735	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
6,054	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611
6,372	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
9,559	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Für den Gebrauch dieser Tabellen ist noch zu bemerken, daß wenn die Höhe der Öffnung oder wenn die Druckhöhe über dem oberen Rande der Öffnung zwischen die in den Tafeln aufgenommenen Werthe fallen, man für den Koeffizienten α ein proportionales Mittel zwischen den zunächstliegenden der Tafel zu nehmen habe. Überschreitet endlich die Höhe der Öffnung 0,637 Fuß; so nimmt man als Kontraktionskoeffizienten denjenigen, welcher der Öffnung von 0,637 Fuß Höhe entspricht.

§. 85. Verschiedene Fälle der unvollkommenen Kontraktion.

Wenn die rechtwinklige Ausflußöffnung an Einer, zwei oder drei Seiten von Wänden eingefaßt ist, welche perpendikular auf der Ebene jener Öffnung stehen (wovon auch die Eine dieser Wände durch den Boden des Gefäßes vertreten werden kann); so wird die Flüssigkeit, wenn diese Wände hinlänglich weit in das Gefäß hineintreten oder aus demselben herausragen, längs derselben parallel zu ihren Ebenen austreten, und es wird sich an den Seiten, wo sich jene Wände befinden, keine Kontraktion des Strahles zeigen können, während dieselbe jedoch an den übrigen Seiten der Öffnung stattfindet.

Diese unvollständige Kontraktion des Strahles äußert nun zuvörderst einen, wenn auch nicht sehr bedeutenden, Einfluß auf die Ausflußgeschwindigkeit V, welche nach den früheren Formeln bei der Druckhöhe h über der Mitte der Öffnung gleich $\sqrt{2gh}$ sein müßte, wegen jenes Einflusses der unvollständigen Kontraktion aber, sowie wegen des bei sehr niedrigen Druckhöhen durch die abgekürzte Formel $\sqrt{2gh}$ begangenen Fehlers gleich

$$V_1 = n\sqrt{2gh}$$

gesetzt wird.

Ist nun auch hier m der Koeffizient für die unvollständige Kontraktion, sodaß $m\Omega$ die Fläche des Querschnittes von der größten Kontraktion bezeichnet; so hat man für die wirkliche Ausflußmenge in der Sekunde, wie vorhin

$$Q = mn\Omega\sqrt{2gh} = \alpha\Omega\sqrt{2gh}, \quad \ldots\ldots (344)$$

worin $\alpha = mn$ den Ausflußkoeffizenten darstellt.

Die verschiedenen Werthe dieses Ausflußkoeffizienten α für

unvollständige Kontraktion kann man nun aus denen für vollständige Kontraktion, welche in den beiden vorhergehenden Tafeln gegeben sind, herleiten, indem man nach Poncelet die Letzteren,

wenn die Kontraktion auf 3 Seiten stattfindet, mit 1,035,
" " " " 2 " " " 1,072,
" " " " 1 " " " 1,125

multiplizirt.

Es ist schon früher angeführt, daß wenn die Kontraktion vollkommen sein soll, die Seiten der Ausflußöffnung möglichst weit von den Wänden und dem Boden des Gefäßes entfernt sein müssen. Ist Dies nicht der Fall, so wird sich die Kontraktion des austretenden Strahles nicht vollkommen äußern, und der Werth des Ausflußkoeffizienten α aus den obigen Tabellen wird sich vergrößern. Diese Vergrößerung hängt von dem Verhältnisse A ab, in welchem die Ausflußöffnung CD zu dem unmittelbar vorhergehenden Querschnitte GH des Gefäßes steht. Bezeichnet man nun den Faktor, mit welchem der Werth von α aus den obigen Tabellen multiplizirt werden muß, um den Ausflußkoeffizienten für die in Rede stehende unvollkommene Kontraktion bei verschiedenen Werthen des Verhältnisses A zu erhalten, mit β; so kann man nach den Versuchen von Weisbach*) den Werth von β aus nachfolgenden Tabellen bestimmen.

1) Korrektionsfaktor für kreisrunde Öffnungen, wegen unvollkommener Kontraktion.

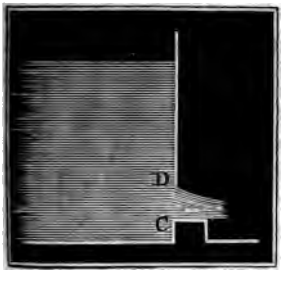
Werth des Verhältnisses A	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,15	0,50
Korrektionsfaktor β	1,007	1,014	1,023	1,034	1,045	1,059	1,075	1,092	111,2	1,134
Werth des Verhältnisses A	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
Korrektionsfaktor β	1,161	1,189	1,223	1,260	1,303	1,351	1,408	1,471	1,546	1,613

*) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

2) Korrektionsfaktor für rechtwinklige Öffnungen, wegen unvollkommener Kontraktion.

Werth des Verhältnisses A	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
Korrektionsfaktor β	1,009	1,019	1,030	1,042	1,056	1,071	1,088	1,107	1,128	1,152
Werth des Verhältnisses A	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
Korrektionsfaktor β	1,178	1,208	1,241	1,278	1,319	1,365	1,416	1,473	1,537	1,608

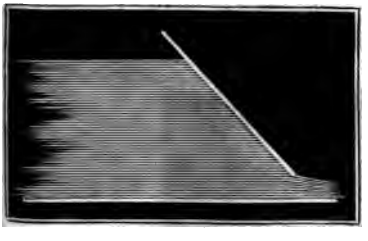
Bei Schützöffnungen in vertikalen Schleusenthoren, welche, wie die CD in der seitstehenden Figur, sehr nahe über dem Boden liegen, sodaß an der unteren Kante die Kontraktion nicht vollkommen erfolgen kann, hat man für den Ausflußkoeffizienten α aus Gl. (344) den Werth



$$\alpha = 0{,}625$$

in Anwendung zu bringen.

Wenn die beiden vertikalen Seiten und die Sohle der Schützöffnung in den Verlängerungen der Seitenwände und des Bodens des Behälters liegen, und das Schützbrett geneigt ist, wie es nach der seitstehenden Anordnung bei unterschlächtigen Wasserrädern mit krummen Schaufeln vorkommt, kann man setzen, wenn die Neigung des Schützbrettes



2 Fuß Höhe auf 1 Fuß Ausladung beträgt, $\alpha = 0{,}74$,
1 " " " 1 " " " $\alpha = 0{,}80$.

Es muß noch angeführt werden, daß wenn sich in einem

Gefäße nahe nebeneinander mehrere Öffnungen befinden, dieselben hinsichtlich des Ausflusses keinen wesentlichen Einfluß aufeinander ausüben, sodaß man für jede derselben eben die Formeln und Koeffizienten in Anwendung bringen kann, wie wenn dieselbe für sich allein nur vorhanden wäre.

§. 86. Erfahrungen über den Ausfluß des Wassers aus rechtwinklige Öffnungen in dünnen Wänden, wenn sich an diese Öffnungen Gerinne oder Kanäle anschließen, in welchen die Flüssigkeit weiterfließt.

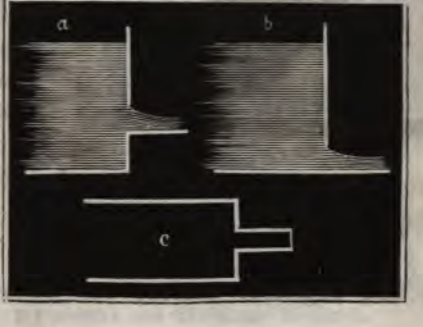
Zuweilen sind an derartigen Ausflußöffnungen Gerinne oder Kanäle angebracht, welche oben offen sind, deren Breite der Breite der Öffnung gleich ist und deren Sohle mit dem tiefsten Rande der Öffnung in gleicher Höhe liegt und sich mehr oder weniger stark neigt. Die Gegenwart solcher offenen Gewinne hat auf die Ausflußmenge wenig Einfluß, wenn man dabei die unvollständige Kontraktion nach den Regeln des vorhergehenden Paragraphs berücksichtigt, und wenn die Druckhöhe über der Mitte der Öffnung

bei Öffnungen von 0,5 bis 0,6 Fuß Höhe nicht weniger, als 1,5 bis 2 Fuß beträgt,

bei Öffnungen von 0,3 Fuß Höhe nicht weniger, als 1 bis 1,25 Fuß beträgt,

bei Öffnungen von 0,16 Fuß Höhe nicht weniger, als 0,64 Fuß beträgt.

Ist die Druckhöhe jedoch geringer, als im Vorstehenden angegeben; so kann man für die beiden unter Figur (*a*) und (*b*) dargestellten Anordnungen, denen der Grundriß (*c*) gemeinschaft-



lich angehört, nach Poncelet und Lesbros folgende Werthe des Ausflußkoeffizienten α annehmen, um mittelst desselben nach der Formel (344) die wirkliche Ausflußmenge zu berechnen.

Höhe der Öffnung.	Druckhöhe über der Mitte der Öffnung.	Ausflußkoeffizient α für die Anordnung	
		(a)	(b)
Fuß.	Fuß.		
0,637	1,274	0,591	0,580
	0,765	0,559	0,552
	0,382	0,483	0,482
0,319	0,510	0,590	0,580
	0,350	0,562	0,560
	0,287	0,523	0,522
	0,191	0,464	0,463
0,159	0,637	0,631	0,615
	0,350	0,614	0,597
	0,159	0,495	0,493
	0,127	0,452	0,443
0,096	0,637	0,632	0,631
	0,191	0,627	0,605

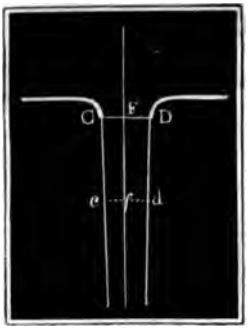
§. 87. Einfluß der Widerstände, gegen welche der Strahl bei seinem Heraustreten trifft, auf die Ausflußmenge.

Wenn man dem ausfließenden Strahle in normaler Richtung eine feste Ebene entgegenhält; so wird die Ausflußmenge vermindert, sobald die Ebene der Öffnung sehr nahe gebracht wird. Nach einem Versuche von Hachette mit einer Öffnung von 0,06 Fuß Durchmesser in einer ebenen Wand wird die Verminderung der Ausflußmenge bemerkbar, wenn der Abstand der Ebene doppelt so groß ist, als der Durchmesser der Öffnung. Ist der Abstand der Ebene $\frac{1}{5}$ des Durchmessers der Öffnung; so vermindert sich die Ausflußmenge etwa in dem Verhältnisse von 3:2.

Figur des aus einem Gefäße in die Luft springenden flüssigen Strahles.

§. 88. Fall, wo der Strahl vertikal nach unten ausfließt.

Wir betrachten zuvörderst den Fall, wo der Strahl der Flüssigkeit aus einer kreisrunden Öffnung, welche nach innen gehörig erweitert ist, sodaß keine Kontraktion stattfindet, in vertikaler Richtung aus dem Gefäße tritt. Die Bewegung der aus dem Gefäße getretenen Wassertheilchen, welche nun nicht mehr gezwungen sind, sich gegebenen Wänden anzuschließen, und der Wirkung der Schwere frei folgen können, wird eine gleichförmig beschleunigte sein. Da man auch jetzt immer noch annehmen kann, daß sich die Flüssigkeit in dem freien Strahle in parallelen Querschichten von sehr geringer Stärke bewege, indem sie stets eine zusammenhängende Masse bildet; so folgt, daß die Flächen der tiefer liegenden Querschnitte in demselben Maaße abnehmen, wie sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in diesen Querschnitten in Folge der Einwirkung der Schwere vermehrt. Nennt man daher



Ω die Fläche der Ausflußöffnung CD,
V die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in dieser Öffnung, wie sie nach den früheren Formeln berechnet ist,
ω die Fläche irgend eines Querschnittes cd des Strahles,
v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in diesem Querschnitte,
x den Abstand Ff;
so hat man nach den bekannten Gesetzen der durch die Wirkung der Schwere erzeugten geradlinigen Bewegung

$$v = \mathrm{V} + gt, \quad x = \mathrm{V}t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$v = \sqrt{\mathrm{V}^2 + 2gx}; \qquad \ldots\ldots (345)$$

mithin, da $\omega v = \Omega \mathrm{V}$ sein muß,

$$\omega = \frac{\Omega \mathrm{V}}{\sqrt{\mathrm{V}^2 + 2gx}} \qquad \ldots\ldots (346)$$

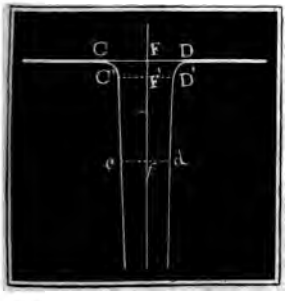
oder auch, wenn man für die Ausflußgeschwindigkeit V den Werth $\sqrt{2gZ}$ aus Gl. (302) setzt,

$$v = \sqrt{2g(Z+x)} \quad \ldots\ldots (347)$$

und

$$\omega = \Omega\sqrt{\frac{Z}{Z+x}} \quad \ldots\ldots (348)$$

Wenn die Ausflußöffnung CD nicht nach innen erweitert ist, sondern sich in einer dünnen ebenen Wand befindet; so tritt die bekannte Kontraktion des Strahles ein. In einem Abstande $FF' = \lambda$ (s. §. 84), wo der Querschnitt C'D' der stärksten Kontraktion liegt, sind die Fäden der Flüssigkeit fast genau der Axe F*f* parallel. Die Größe des Querschnittes C'D' ist $= m\Omega$, worin der Kontraktionskoeffizient m den entsprechenden Werth aus §. 84 hat. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in diesem Querschnitte C'D' ist nach Formel (333) $V = \sqrt{2g(Z+\lambda)}$.



Nach der obigen Gleichung (345) hat man also für die Geschwindigkeit in dem Querschnitte *cd*, welcher um $Ff = x$ von der Ausflußöffnung absteht, wenn man beachtet, daß $F'f = x - \lambda$ ist,

$$v = \sqrt{V^2 + 2g(x-\lambda)} = \sqrt{2g(Z+x)} \quad \ldots\ldots (348)$$

und daher für die Größe des Querschnittes *cd*, da $\omega v = m\Omega V$ sein muß,

$$\omega = \frac{m\Omega V}{\sqrt{V^2 + 2g(x-\lambda)}} = m\Omega\sqrt{\frac{Z+\lambda}{Z+x}} \quad \ldots\ldots (349)$$

§. 89. Fall, wo der Strahl vertikal nach oben ausfließt.

In diesem Falle werden die Querschichten der Flüssigkeit in dem freien Strahle eine gleichförmig verzögerte Bewegung annehmen, sodaß sich die Querschnitte des Strahles nach oben hin vergrößeren.

Ist nun die Ausflußöffnung nach innen allmählig erweitert, sodaß keine Kontraktion stattfindet; so wird man die Gleichungen für den vorliegenden Fall aus den Gleichungen (345), (346), (347) und (348) erhalten, indem man darin die Größe $Ff = x$ mit entgegengesetztem Zeichen nimmt. Dies gibt, wenn man die Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphs beibehält,

$$v = \sqrt{V^2 - 2gx} = \sqrt{2g(Z - x)} \quad \ldots\ (350)$$

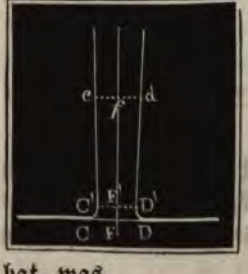
$$\omega = \frac{\Omega V}{\sqrt{V^2 - 2gx}} = \Omega \sqrt{\frac{Z}{Z - x}} \quad \ldots\ (351)$$

Aus Gl. (350) folgt, daß der vertikal nach oben springende Strahl die Höhe

$$x = \frac{V^2}{2g} = Z \quad \ldots\ (352)$$

erreichen wird, da für diesen Werth von x die Geschwindigkeit $v = o$ wird. Man sieht also, daß sich ein solcher Strahl bis zur Druckhöhe Z der Flüssigkeit über der Ausflußöffnung oder bis zum Niveau des oberen Spiegels der Flüssigkeit erheben wird. Dieses Resultat setzt jedoch voraus, daß die Umstände von der Art seien, daß man für die Ausflußgeschwindigkeit V näherungsweise den Werth $\sqrt{2gZ}$ setzen könne (vergl. §. 73).

Wenn sich die Ausflußöffnung in einer dünnen ebenen Wand befindet, sodaß der Strahl mit Kontraktion austritt; so hat man offenbar in den Formeln (348) und (349) x und λ mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, indem man auch für die Geschwindigkeit V im Querschnitte der stärksten Kontraktion



$$V = \sqrt{2g(Z - \lambda)}$$

hat, was

$$v = \sqrt{V^2 - 2g(x-\lambda)} = \sqrt{2g(Z-x)} \quad \ldots\ldots (353)$$

und

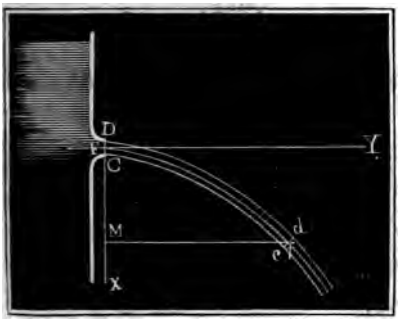
$$\omega = \frac{m\Omega V}{\sqrt{V^2 - 2g(x-\lambda)}} = m\Omega\sqrt{\frac{Z-\lambda}{Z-x}} \quad \ldots\ldots (354)$$

ergibt.

Auch dieser Strahl erhebt sich bis zur Höhe $x = Z$ d. i. bis zum Niveau des Oberspiegels der Flüssigkeit.

§. 90. Fall, wo der Strahl in horizontaler Richtung austritt.

Wenn der Strahl ohne Kontraktion aus einer nach innen gehörig erweiterten Öffnung CD einer vertikalen Wand in horizontaler Richtung austritt; so wird seine Axe eine parabolische Krümmung annehmen, indem eine jede Querschicht desselben diejenige Parabel durchläuft, welche sie nach den Gesetzen geworfener Körper durchlaufen müßte. Hierbei wird von dem Widerstande der Luft abstrahirt, welcher die Weite dieser Parabel ein wenig zu vermindern strebt.



Legt man durch die Mitte F der Öffnung CD resp. die vertikale und horizontale Koordinatenaxe FX und FY, auf welche die Kurve des Strahles bezogen werden soll, und bezeichnet ein unendlich kleines Kurvenelement der Axe des Strahles bei f mit ds; so hat man für die Geschwindigkeit v der Flüssigkeit bei f oder in dem Querschnitte ω

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

und hierin bezeichnen $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ resp. die Komponenten der Geschwindigkeit v in vertikaler und in horizontaler Richtung.

Da man nun für die wirksame Kraft, welche die wirkliche

Bewegung der Theilchen bei f in vertikaler Richtung hervorbringt, indem diese Theilchen ganz frei sind und nur von der Schwere sollizitirt werden,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

und

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2$$

hat, woraus $t = \frac{2x}{g}$, also

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2gx} \qquad \ldots\ldots (355)$$

folgt, da ferner die horizontale Komponente der Geschwindigkeit v

$$\frac{dy}{dt} = V \qquad \ldots\ldots (356)$$

ist; so folgt zuvörderst aus den beiden Gleichungen (355) und (356)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{\sqrt{2gx}}, \text{ also}$$

$$y = V\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2V^2}{g}.x}, \qquad \ldots\ldots (357)$$

oder wenn man $V = \sqrt{2gZ}$ setzt,

$$y = \sqrt{4Z.x} \qquad \ldots\ldots (358)$$

Der Parameter der Parabel, welche der horizontal ausfließende Strahl bildet, ist also gleich dem Vierfachen der Druckhöhe Z über der Mitte der Ausflußöffnung.

Wenn man die Werthe von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ aus den Gleichungen (355) und (356) in den Ausdruck für die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ in dem Querschnitte ω des Strahles, dessen Koordinaten x und y sind, substituirt; so erhält man

$$v = \sqrt{V^2 + 2gx} = \sqrt{2g(Z+x)}; \qquad \ldots\ldots (359)$$

also für die Größe des Querschnittes ω

$$\omega = \frac{\Omega V}{\sqrt{V^2 + 2gx}} = \Omega \sqrt{\frac{Z}{Z+x}} \qquad \ldots\ldots (360)$$

Wenn die Öffnung CD nicht nach innen erweitert wäre, sondern in einer dünnen vertikalen Wand läge, sodaß der Strahl mit Kontraktion austräte; so würde man zu berücksichtigen haben, daß der Querschnitt $m\Omega$ der größten Kontraktion, in welchem die Fäden der Flüssigkeit eine parallele Bewegung annehmen, um die Entfernung λ vor der Ausflußöffnung Ω liegt, und daß die Geschwindigkeit V im Querschnitte der größten Kontraktion $= \sqrt{2gZ}$ ist. Behält man also den Mittelpunkt der Ausflußöffnung Ω als Anfangspunkt der Koordinaten bei; so hat man statt Gl. (357) und (358) zu setzen

$$y - \lambda = \sqrt{\frac{2V^2}{g} \cdot x} = \sqrt{4Z \cdot x} \qquad \ldots\ldots (361)$$

und statt der Gleichungen (359) und (360)

$$v = \sqrt{V^2 + 2gx} = \sqrt{2g(Z+x)} \qquad \ldots\ldots (362)$$

$$\omega = \frac{m\Omega V}{\sqrt{V^2 + 2gx}} = m\Omega \sqrt{\frac{Z}{Z+x}} \qquad \ldots\ldots (363)$$

§. 91. Inversion oder Verdrehung des Strahles bei nichtkreisförmigen Öffnungen.

Die in §. 88 bis 90 mitgetheilten Bemerkungen gehören auch den Fällen an, wo der flüssige Strahl aus einer Öffnung springt, deren Figur nicht kreisförmig ist. In diesen Fällen beobachtet man jedoch noch eine unter dem Namen der Inversion oder Verdrehung des Strahles bekannte merkwürdige Erscheinung, welche im Allgemeinen darin besteht, daß sich die Figur des Querschnittes des Strahles mit zunehmender Entfernung von der Ausflußöffnung dergestalt verändert, daß die längsten diametralen Dimensionen die kürzesten werden, sodaß jene Figur des Querschnittes bei einer gewissen Entfernung von der Öffnung an denjenigen Stellen, wo früher die Mitten geradliniger Seiten lagen, nunmehr ausspringende Winkel bildet, und umgekehrt.

Nach einem Versuche von Venturi mit einer rechtwinkligen [illegible] in den Ecken abgerundeten Öffnung A von 18 Linien Länge und

einer Breite von etwa 6 Linien ist der Querschnitt des Strahles jenseit der Öffnung zuerst durch B, in einem Abstande von 4 Zoll durch C, alsdann durch D dargestellt.

Nach mehreren Versuchen von verschiedenen Experimentatoren mit einer quadratischen Ausflußöffnung E, deren Seite 0,356 Fuß hielt, ist der Querschnitt des Strahles in einer Entfernung von

0,335 Fuß von der inneren Wand des Gefäßes durch F, in einer Entfernung von 1,329 Fuß durch G, in einer Entfernung von 1,593 Fuß durch H und in einer Entfernung von 1,854 Fuß durch J dargestellt. Die horizontalen und vertikalen Seiten dehnen sich alsdann immer mehr und mehr aus.

Nach den Beobachtungen von Poncelet und Lesbros nimmt ein Strahl, welcher in horizontaler Richtung bei einer Druckhöhe von 5,353 Fuß über der Mitte der Öffnung aus einer qua-

dratischen Öffnung von 0,637 Fuß Weite in einer dünnen Wand springt, nach und nach folgende Querschnitte an:

den Querschnitt K bei einer Entfernung von 0,020 Fuß
" " L " " " = 0,478 "
" " M " " " = 0,797 "
" " N " " " = 1,115 "
" " O " " " = 1,434 "

Späterhin trennen sich von dem Strahle einzelne Tropfen ab, und zuletzt löſ't sich der ganze Strahl in Tropfen auf.

Ein aus einer dreieckigen Öffnung P springender Strahl nimmt endlich die Figur Q an, deren Seiten sich mit zunehmender Entfernung von der Öffnung immer weiter ausdehnen.

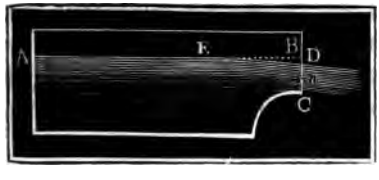
Es muß hier nach bemerkt werden, daß wenn durch die Einsetzung einer Wand an Einer oder mehreren Seiten der Ausflußöffnung, oder weil diese Öffnung unmittelbar an Einer der Seitenwände des Gefäßes liegt, die Kontraktion nicht über den ganzen Umfang des Strahles erfolgen kann, die Richtung der Axe des Strahles nicht mehr perpendikular auf der Ebene der Ausflußöffnung bleibt. Der Strahl erweitert sich an derjenigen Seite mehr, an welcher keine Kontraktion stattfindet.

Ausfluß einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit aus einem Überfalle.

§. 92. Ausfluß aus einem Überfalle, wenn die Wände desselben nach innen gehörig erweitert und abgerundet sind, sodaß keine Kontraktion stattfindet.

Unter einem Überfalle versteht man hier eine rechtwinklige Öffnung, deren obere Seite entweder gar nicht vorhanden ist, oder doch höher liegt, als der Spiegel der Flüssigkeit in dem Gefäße.

Beim Ausflusse neigt sich der sonst horizontale Spiegel AE der Flüssigkeit vor der Öffnung, sodaß die Stärke CD des Strahles in der Öffnung geringer ist, als die Höhe CB des Spiegels über dem Boden der Öffnung oder als die eigentliche Druckhöhe. Der vorliegende Fall ist nun von den früheren, wo die Querschnitte der Flüssigkeit durch die unveränderlichen Querschnitte eines Ge-



fäßes gegeben waren, darin unterschieden, daß die Gestalt des ausfließenden Strahles, besonders dessen Stärke in der Ausflußöffnung, unbekannt sind.

Es wird zuvörderst angenommen, daß der Überfall, durch welchen sich die Flüssigkeit aus einem bis zur Höhe AB beständig voll erhaltenen Gefäße ergießt, unten und seitwärts gehörig erweitert und abgerundet sei, sodaß alle Fäden der Flüssigkeit in parallelen Richtungen, also ohne Kontraktion aus der Öffnung treten. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Fläche dieser Öffnung im Verhältnisse zu dem oberen Durchschnitte des Gefäßes sehr klein sei, sodaß die Flüssigkeit in dem Gefäße selbst als still stehend angesehen werden kann.

Wäre nun die Höhe CD des Strahles bekannt; so könnte man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit und somit die Ausflußmenge nach den Regeln der §§. 75 ff. ermitteln, da man offenbar annehmen könnte, daß die Geschwindigkeit, welche die Theilchen in irgend einem Punkte n der Öffnung besitzen, gleich der der Druckhöhe Bn zukommenden Ausflußgeschwindigkeit sei. Um jene noch unbekannte Höhe CD zu bestimmen, geht Navier*) von der Hypothese aus, daß die Summe der lebenden Kräfte, welche die Massentheilchen bei ihrem Durchgange durch die Öffnung erlangt haben, die größtmögliche sei, und schlägt zur analytischen Darstellung dieser Hypothese den folgenden Gang ein.

Es sei

a die horizontale Breite des Überfalles,

h' die Höhe BD des Spiegels der Flüssigkeit über der oberen Fläche des ausfließenden Strahles,

h'' die Höhe BC des Spiegels der Flüssigkeit über dem Boden der Öffnung,

V_1 die mittlere Ausflußgeschwindigkeit nach §. 77.

Wegen der allmähligen Erweiterung der Öffnung nach innen kann man annehmen, daß alle Fäden der Flüssigkeit den Querschnitt CD in perpendikularer Richtung durchschneiden. Da die Geschwindigkeit, welche allen Massentheilchen der Flüssigkeit als gemeinschaftliche beigelegt werden kann, gleich V_1 ist; so be-

*) Résumé des leçons sur l'application de la mécanique. Seconde partie. No. 62.

trägt die Ausflußmenge für die Zeiteinheit $V_1 a(h''-h')$, und die Masse dieses Volums, wenn man das Gewicht der Volumeinheit gleich w setzt, $\frac{w}{g} V_1 a(h''-h')$. Da nun ein jedes Theilchen dieser Masse von der Geschwindigkeit V_1 belebt gedacht wird; so hat man für die lebende Kraft der in der Zeiteinheit aus der Überfallöffnung tretenden Flüssigkeit

$$V_1^2 . \frac{w}{g} V_1 a(h''-h') = \frac{w}{g} V_1^3 a(h''-h'),$$

oder wenn man für V_1 seinen Werth aus Gl. (326ª) substituirt,

$$\frac{8}{27} \frac{w}{g} a (2g)^{\frac{3}{2}} \frac{(h''^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}})^3}{(h''-h')^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist h' die einzige unbestimmte Größe. Setzt man nun, da dieser Ausdruck ein Maximum werden soll, das Differenzial desselben in Beziehung zu h' gleich null; so erhält man die Gleichung

$$5h'^3 - gh''h'^{\frac{1}{2}} + 4h''^{\frac{3}{2}} = o \qquad \ldots . (364)$$

Aus dieser Gleichung des dritten Grades ergeben sich

für $h'^{\frac{1}{2}}$ die drei Werthe $h''^{\frac{1}{2}}$, $-1{,}5247 . h''^{\frac{1}{2}}$, $0{,}5247 h''^{\frac{1}{2}}$, also
h' = h'', $2{,}3246 . h''$, $0{,}2753 h''$.

Man erkennt leicht, daß die ersten beiden Werthe durch die Bedingungen der Aufgabe ausgeschlossen sind, und daß man nur

$$h' = 0{,}2753 h'' \qquad \ldots . (365)$$

zu nehmen habe, sodaß die Höhe CD des Wasserstrahles in der Öffnung über dem Boden des Überfalles

$$h'' - h' = 0{,}7247 h'' \qquad \ldots . (366)$$

ist.

Hiernach würde die mittlere Ausflußgeschwindigkeit V_1 wegen Gl. (326ª)

$$V_1 = \tfrac{2}{3} \sqrt{2g} \left(\frac{1-(0{,}2753)^{\frac{3}{2}}}{1-0{,}2753} \right) h''$$

und die Ausflußmenge in der Zeiteinheit $Q = V_1 a(h'' - h')$ d. i.

$$Q = \tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\left[1-(0{,}2753)^{\frac{3}{2}}\right]ah''^{\frac{3}{2}} = 0{,}5704\,ah''\sqrt{2gh''} \quad \ldots . (367)$$

sein.

Mustern wir den Gang der vorstehenden Untersuchung genauer; so finden wir, daß gegen die angenommene Hypothese, daß die lebende Kraft der aus der Öffnung CD tretenden Flüssigkeit ein Maximum sei, im Allgemeinen nicht viel zu erinnern sein würde, wenn das dadurch erzielte Resultat mit der praktischen Erfahrung nahezu übereinstimmte, weil es einen ziemlichen Grad von Wahrscheinlichkeit für sich hat, daß die frei waltenden Naturkräfte unter allen besonderen Umständen das mit diesen Umständen sich vertragende Maximum der Wirkung oder der lebenden Kraft hervorbringen werden.

Diese Hypothese also als richtig angenommen, so fragt es sich, ob das Verfahren, welches Navier behuf analytischer Darstellung derselben eingeschlagen hat, frei von allen Einwürfen sei.

Da die Druckhöhe BD der Flüssigkeit über der oberen Seite der Ausflußöffnung im Vergleich zu der vertikalen Höhe dieser Öffnung sehr klein ist, und sogar gleich null sein würde, wenn sich der Spiegel der Flüssigkeit in der Öffnung nicht etwas senkte; so folgt, daß die Ausflußgeschwindigkeit der in verschiedenen Höhen liegenden Theilchen n der Flüssigkeit je nach diesen Höhen verschieden sein wird, weshalb denn auch im Obigen als Ausflußgeschwindigkeit die nach §. 77 bestimmte mittlere Ausflußgeschwindigkeit V_1 eingeführt ist. Nun kann man zwar bei der Bestimmung der Ausflußmenge, wo die Fläche der Öffnung mit jener Größe V_1 zu multipliziren ist, annehmen, daß alle Theilchen der Flüssigkeit in der Öffnung von der mittleren Geschwindigkeit V_1 beseelt seien, weil der Werth von V_1 ja gerade aus dieser Bedingung hergeleitet ist (vergl. §. 75); dessenungeachtet bleibt V_1 aber immer nur eine eingebildete Größe, welche man nicht unter allen Umständen als die allen Theilchen zukommende Ausflußgeschwindigkeit ansehen darf. Namentlich ist Dies bei der Bestimmung der lebenden Kraft der aus der Öffnung tretenden Flüssigkeitsmenge der Fall, wo ein jedes Massentheilchen mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multiplizirt werden muß. Hier multiplizirt Navier ohne Weiteres die in der

Zeiteinheit austretende Masse $\frac{w}{g} V_1 a(h''-h')$ der Flüssigkeit mit dem Quadrate V_1^2 der mittleren Ausflußgeschwindigkeit, wie wenn alle Theilchen des Querschnittes CD dieselbe Geschwindigkeit besäßen. Da Dies offenbar nicht der Fall ist; so wollen wir den wahren Werth der lebenden Kraft der durch die Ausflußöffnung tretenden Flüssigkeit zu bestimmen suchen.

Die Geschwindigkeit der Theilchen n, welche in einer Tiefe $Bn = z$ unter dem Spiegel AB der Flüssigkeit liegen, ist bekanntlich $v = \sqrt{2gz}$. Diese Geschwindigkeit wird in dem ganzen horizontalen Streifen von der Breite a und der unendlich geringen Höhe dz herrschen, welcher in derselben Tiefe z unter dem Spiegel AB liegt. Da nun das aus diesem Streifen in der Zeiteinheit herausfließende Volum der Flüssigkeit $vadz = a\sqrt{2gz}dz$ und dessen Masse $\frac{w}{g} a\sqrt{2gz}dz$, mithin dessen lebende Kraft $v^2 . \frac{w}{g} a\sqrt{2gz}dz = \frac{w}{g} a(2gz)^{\frac{3}{2}}dz$ ist; so hat man für die gesammte lebende Kraft der aus der Öffnung CD in der Zeiteinheit tretenden Flüssigkeit

$$\int_{h'}^{h''} \frac{w}{g} a(2gz)^{\frac{3}{2}} dz = \frac{2}{5} \frac{w}{g} a(2g)^{\frac{3}{2}} (h''^{\frac{5}{2}} - h'^{\frac{5}{2}}).$$

Diese Funktion hat in Beziehung zu der unbestimmten Größe $h' = BD$ kein eigentliches Maximum; dieselbe ist übrigens am größten, wenn $h' = o$ ist. Hieraus folgt, daß die lebende Kraft der aus dem Überfalle sich ergießenden Flüssigkeit am größtmöglichen sein würde, wenn sich der Spiegel AB der Flüssigkeit in der Ausflußöffnung gar nicht senkte, ein Resultat, welches eigentlich a priori schon erwartet werden mußte, da es bekannt war, daß die Ausflußgeschwindigkeit tiefer liegender Theilchen von der Ausflußgeschwindigkeit der höher liegenden gar nicht abhängt, sodaß eine Vergrößerung des Querschnittes CD des ausfließenden Strahles in vertikaler Richtung nothwendig eine Vermehrung der lebenden Kraft der ausfließenden Flüssigkeit zur Folge haben mußte.

Da nun die Erfahrung lehrt, daß sich der Spiegel der Flüs-

sigkeit in der Ausflußöffnung wirklich senkt; so folgt, daß sich die obige Hypotheſe, wonach die lebende Kraft der Ausflußmenge am möglichgrößten ſein ſoll, auf den Ausfluß aus einer Überfallöffnung durchaus nicht anwenden läßt, und daß es rein zufällig iſt, daß Navier durch die irrthümliche Expoſition jener Hypotheſe durch analytiſche Formeln auf ein Reſultat gekommen iſt, welches ſich den praktiſchen Erſcheinungen in den gewöhnlichen Fällen ziemlich nahe anzuſchließen ſcheint. Dieſes Reſultat (367) bleibt hiernach immer nur eine Illuſion und iſt nicht dazu geeignet, die Vorgänge in der Wirklichkeit, um die es ſich hier handelt, zu erklären.

An praktiſchen Erfahrungen über die Größe der Senkung $BD = h'$ des Spiegels oder über die Stärke CD des Waſſerſtrahles in der Öffnung, ſowie über die Ausflußmenge aus einer nach innen gehörig erweiterten Überfallöffnung, aus welcher der Strahl ohne Kontraktion treten kann, fehlt es bis jetzt noch.

§. 93. Erfahrungen über den Ausfluß des Waſſers aus einer Überfallöffnung in einer dünnen vertikalen Wand.

Wenn ſich die Überfallöffnung in einer dünnen Wand befindet; ſo ſenkt ſich der horizontale Spiegel AB vor und in der Öffnung ebenfalls um eine gewiſſe Tiefe $BD = h'$. Außerdem tritt aber noch von den Seiten und vom Boden der Öffnung her Kontraktion des Strahles ein.

Bezeichnet man die von dem horizontalen Theile AB des Spiegels aus gemeſſene Höhe der Flüſſigkeit über dem Boden C der Öffnung, alſo BC mit h'', während die Breite dieſer Öffnung gleich a iſt; ſo kann man die Ausflußmenge Q für die Sekunde nach der Formel

$$Q = \alpha a h'' \sqrt{2gh''} \qquad \ldots . (368)$$

berechnen, wenn man nach den Verſuchen von Poncelet und Lesbros dem Ausflußkoeffizienten α für die verſchiedenen Werthe von h'' folgende Werthe gibt:

Werthe von h''	0,032	0,064	0,096	0,127	0,191	0,255	0,319	0,478	0,637	0,701 Fuß.
Werthe von α	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385

Die Öffnungen hatten hierbei immer eine horizontale Breite
a = 0,637 Fuß.

Wenn die Öffnungen größer sind; so ergeben die Versuche
Eytelwein, Bidone und D'Aubuisson, daß man für
Ausflußkoeffizienten α in der Formel (368) im Durchschnitte
Werth

$$\alpha = 0{,}41$$

zen könne.

Wenn sich die Überfallöffnung über die ganze Breite des
ehälters erstreckt, sodaß an den Seiten des ausfließenden Strah-
s keine Kontraktion stattfindet; so kann man im Mittel

$$\alpha = 0{,}444$$

nehmen.

Wenn jedoch die Breite der in einer dünnen Wand befind-
chen Überfallöffnung nicht die ganze Breite des Behälters, wol
er einen ansehnlichen Theil derselben einnimmt, sodaß die Sei-
nkontraktion des Strahles nur vermindert wird und sich nicht
ollkommen äußern kann; so hängt der Ausflußkoeffizient α von
em Verhältnisse A der Fläche der Ausflußöffnung zu dem Quer-
hnitte des davorliegenden Behälters ab. Bezeichnet man den
aktor, mit welchem der Ausflußkoeffizient der früher erwähnten
älle bei vollkommener Kontraktion multiplizirt werden muß, um
en Ausflußkoeffizienten für die in Rede stehende unvollkommene
ontraktion zu ergeben, mit β; so kann man nach den Erfahrun-
en von Weisbach für β folgende Werthe setzen.

orrektionsfaktor für den Ausflußkoeffizienten bei unvollkommener
ontraktion des Strahles in den Ponceletschen Überfallöffnungen.

Werth des Verhältnisses A	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
Werth des Korrektionskoeffizienten β	1,000	1,000	1,001	1,003	1,007	1,014	1,026	1,044	1,070	1,107

§. 94. Beobachtete Höhe des aus Überfallöffnungen in dünnen Wänden hervortretenden Wasserstrahles.

Zuweilen ist man nicht im Stande, die gesammte Druckhöhe
BC = h″ des horizontalen Theiles des Spiegels der Flüssigkeit

über dem Boden der Ausflußöffnung zu messen, und kann nur die Höhe $CD = h'' - h'$ des austretenden Strahles über jenem Boden abnehmen. Damit es nun möglich sei, aus dieser Höhe $h'' - h'$ die Ausflußmenge zu berechnen, muß man das Verhältniß kennen, welches zwischen den Größen $CB = h''$ und $CD = h'' - h'$ oder auch zwischen der gesammten Druckhöhe $CB = h''$ und der Senkung $BD = h'$ besteht, weil man alsdann in den Stand gesetzt wird, aus der gemessenen Höhe $CD = h'' - h'$ des Strahles in der Ausflußöffnung die Druckhöhe $BC = h''$ zu ermitteln und alsdann die Formel (368) für die Ausflußmenge in Anwendung zu bringen.

Man hat beobachtet, daß im Allgemeinen das Verhältniß der Senkung des Spiegels in der Überfallöffnung zur Druckhöhe zunimmt, wenn die Druckhöhe selbst abnimmt. Im Nachstehenden ist eine Tabelle der Erfahrungen verschiedener Beobachter über das Verhältniß $\frac{h''}{h'' - h'}$ der gesammten Druckhöhe BC zu der Höhe CD des Strahles in der Öffnung mitgetheilt. A bezeichnet darin das Verhältniß der horizontalen Breite der Überfallöffnung zu der Breite des davor liegenden Behälters; h'' ist $= BC$ und $h' = BD$, also $h'' - h' = DC$.

A	h''	$h'' - h'$	$\frac{h''}{h'' - h'}$	$\frac{h'' - h'}{h''}$	Beobachter
	Fuß	Fuß			
0,0543	0,691	0,637	1,085	0,922	Lesbros.
	0,574	0,523	1,097	0,912	
	0,417	0,376	1,116	0,896	
	0,357	0,319	1,120	0,893	
	0,230	0,198	1,161	0,861	
	0,092	0,072	1,284	0,779	
0,1205	0,538	0,509	1,060	0,943	Bidone.
	0,280	0,259	1,083	0,923	
0,1250	1,250	1,219	1,025	0,975	Eytelwein.
0,2080	0,900	0,853	1,055	0,948	
0,2656	0,414	0,376	1,101	0,908	Bidone.
	0,322	0,282	1,139	0,878	
0,2920	0,720	0,645	1,116	0,896	Eytelwein.
0,3750	0,596	0,523	1,140	0,877	

Für Überfallöffnungen, welche die ganze Breite des Behälters einnehmen, sodaß der austretende Strahl keine Seitenkontraktion erleidet, kann man im Durchschnitte

$$\frac{h''}{h''-h'}=1{,}25 \text{ oder } \frac{h''-h'}{h'}=0{,}8$$

nehmen.

§. 95. Erfahrungen über den Ausfluß des Wassers aus einer Überfallöffnung mit einem Gerinne.

Wenn sich die Seiten und der Boden der Überfallöffnung in ein wenig geneigtes Gerinne fortsetzen; so kann man sich nach den Versuchen von Poncelet und Lesbros als Ausflußkoeffizient α für die Formel (368) folgender Werthe bedienen, jenachdem die Öffnung mit dem Gerinne nach Fig. (*a*) oder (*b*) des §. 86 angeordnet ist.

Druckhöhe über der Sohle der Öffnung	Ausflußkoeffizient α für die Anordnung	
	(*a*)	(*b*)
Fuß		
0,669	0,319	0,324
0,478	0,314	0,313
0,319	0,305	0,303
0,191	0,283	0,281
0,127	0,272	0,259
0,096	0,227	0,227

§. 96. Ausfluß aus einem mit einer Überfallöffnung versehenen Behälter, welcher sich leert.

Wenn der mit einer Überfallöffnung versehene Behälter keinen Zufluß erhält; so wird sich der Spiegel der Flüssigkeit während des Ausfließens der Letzteren allmählig herabsenken.

Bezeichnen wir mit

t die Druckhöhe der Flüssigkeit über der Sohle der Überfallöffnung in dem Augenblicke, wo man anfängt, die Zeit zu zäh-

len (eine Größe, welche in den vorhergehenden Paragraphen mit h'' bezeichnet ist), mit

Z diese Druckhöhe am Ende der Zeit t, mit

O die Fläche des horizontalen Querschnittes des Behälters in der Höhe Z über der Sohle des Überfalles, mit

a die horizontale Breite der Überfallöffnung, mit

α den Ausflußkoeffizienten aus Gl. (368), von welchem wir annehmen, daß er während des Sinkens des Spiegels der Flüssigkeit stets konstant bleibe;

so hat man für die Ausflußmenge während der sehr kurzen Zeit dt am Ende an der Zeit t nach Gl. (368)

$$\alpha a Z \sqrt{2gZ} \,.\, dt,$$

und da diese Größe offenbar gleich $-O dZ$ sein muß; so hat man

$$\alpha a Z \sqrt{2gZ} \,.\, dt = -O dZ$$

oder

$$dt = -\frac{1}{\alpha a \sqrt{2g}} \frac{O dZ}{Z^{\frac{1}{2}}};$$

mithin

$$t = -\frac{1}{\alpha a \sqrt{2g}} \int_{\zeta}^{Z} \frac{O dZ}{Z^{\frac{1}{2}}} \qquad \ldots . (369)$$

Wenn der Behälter prismatisch ist, sodaß dessen horizontaler Querschnitt O eine konstante Größe bildet; so hat man

$$t = \frac{2O}{\alpha a \sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{Z}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \qquad \ldots . (370)$$

In dieser Zeit sinkt der Spiegel der Flüssigkeit von der Höhe ζ bis zur Höhe Z herab.

Für $Z = o$ würde man die Zeit T erhalten, in welcher der Spiegel der Flüssigkeit bis zur Sohle des Überfalles herabsinkt. Diese Zeitgröße

$$T = \frac{2O}{\alpha a \sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{o}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \qquad \ldots . (371)$$

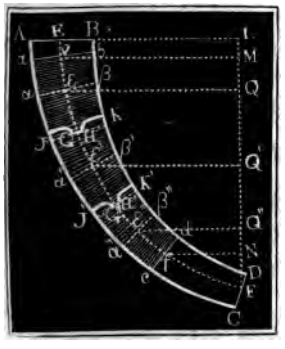
ist offenbar unendlich groß, woraus folgt, daß eine unendlich lange

Zeit dazu gehörte, bis der Spiegel der Flüssigkeit in dem Behälter bis zur Sohle der Überfallöffnung herabsänke oder bis sich ein Gefäß vermittelst eines Überfalles bis zur Tiefe der Sohle dieses Überfalles ausleerte.

Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem Gefäße, in welchem sich an mehreren Stellen der Querschnitt plötzlich um eine endliche Größe ändert.

§. 97. Bewegung einer Flüssigkeit unter den vorstehenden Voraussetzungen in einer engen Röhre.

ABDC sei eine enge Röhre, in welcher sich mehrere Scheidewände, in der seitstehenden Figur zwei, mit Öffnungen **GH** und **G'H'** befinden, von denen die letzteren nach oben gehörig erweitert und abgerundet sind, sodaß die Flüssigkeit *ohne Kontraktion* durch dieselben treten kann. In dieser Röhre bewegt sich eine gewisse Menge einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit, deren obere Endfläche am Ende der Zeit t *ab* und deren untere Endfläche zu derselben Zeit *cd* ist. Beim Passiren der Öffnungen **GH** und **G'H'** wird die Flüssigkeit gezwunden, plötzlich resp. die Querschnitte **JK** und **J'K'** einzunehmen.



Behalten wir die in §. 55 und 57 allgemein eingeführten Bezeichnungen, soweit sie dem gegenwärtigen Falle angehören, bei, sodaß, um dieselben nochmals zu wiederholen,

ω die Fläche irgend eines normalen Querschnittes $\alpha\beta$ oder $\alpha'\beta'$ oder $\alpha''\beta''$ des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes,

O', O'' resp. die obere und untere Endfläche *ab* und *cd* der Flüssigkeit am Ende der Zeit t,

ω_1, ω_2 resp. die unmittelbar aufeinander folgenden Querschnitte **GH** und **JK**, welche sich plötzlich um endliche Werthe ändern,

ω_3, ω_4 resp. die in ähnlicher Beziehung stehenden Querschnitte **G'H'** und **J'K'**,

Ω die Fläche eines bestimmten Querschnittes der Röhre, z. B. des untersten CD,

s die Bogenlänge der Axe der Röhre vom Mittelpunkte E des obersten oder überhaupt eines bestimmten Querschnittes bis zur Mitte des Querschnittes ω, also die Länge des Axentheiles $E\varepsilon$ oder $E\varepsilon'$ oder $E\varepsilon''$,

s', s'' die Längen der Theile Ee und Ef der Axe der Röhre,

z den vertikalen Abstand LQ oder LQ' oder LQ'', welcher der Axenlänge s entspricht,

z', z'' die vertikalen Abstände LM und LN, welche den Axenlängen s' und s'' entsprechen,

v die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Querschnitte ω am Ende der Zeit t,

v', v'' die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit der beiden Endflächen O' und O'' zu derselben Zeit,

v_1, v_2 die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit resp. in den Querschnitten $GH=\omega_1$, und $JK=\omega_2$,

v_3, v_4 die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit resp. in den Querschnitten $G'H'=\omega_3$ und $J'K'=\omega_4$,

V die Geschwindigkeit, welche in dem bestimmten Querschnitte Ω stattfinden müßte, damit durch diesen Querschnitt dieselbe Quantität der Flüssigkeit ginge, welche in derselben Zeit mit der Geschwindigkeit v durch den Querschnitt ω geht,

$w=\mu g$ das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit, wenn μ deren Dichtigkeit bezeichnet und $g=31{,}2644$ Fuß ist,

p', p'' den Druck auf die Flächeneinheit, welcher von außen resp. gegen die obere und untere Endfläche O' und O'' der Flüssigkeit ausgeübt wird,

p den hydraulischen Druck der Flüssigkeit in irgend einem Querschnitte ω auf die Flächeneinheit am Ende der Zeit t,

Q das Volum der Flüssigkeit, welches sich, vom Ende der Zeit t aus gerechnet, in der Zeiteinheit durch irgend einen Querschnitt ω der Röhre ergießt,

darstellt.

Auf den vorliegenden Fall ist offenbar die allgemeine Gleichung (241) anzuwenden, indem man aus derselben diejenigen Glieder hinwegläßt, welche sich auf die Wirkung gewisser äußerer

auf die Flüssigkeit angebrachter Kräfte R und auf den Reibungswiderstand F der Röhre beziehen. Hiernach hat man also

$$p'-p''+w(z''-z')=\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{\omega}+\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{O''^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)$$

$$+\frac{w}{2g}V^2\left[\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots (372)$$

Mit dieser Gleichung ist die folgende

$$O'ds'=\Omega V dt \quad \ldots\ldots (373)$$

oder die Gleichung

$$O''ds''=\Omega V dt \quad \ldots\ldots (374)$$

zu verbinden.

Der hydraulische Druck p auf die Flächeneinheit, welcher in irgend einem Querschnitte ω der Röhre stattfindet, ergibt sich nach den Prinzipien des §s 56 offenbar folgendermaaßen:

1) wenn der Querschnitt ω **oberhalb der höchsten Scheidewand**, also in $\alpha\beta$ liegt, indem man in der Gleichung (372) p, ω, s, z an die Stelle von p'', O'', s'', z'' setzt und gleichzeitig das in $\left[\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right]$ multiplizirte Glied, welches die Wirkung der plötzlichen Änderung der Geschwindigkeit beim Durchgange der Flüssigkeit durch die **unterhalb des Querschnittes** ω liegenden Scheidewände mißt, hinwegläßt, und indem man alsdann die so gewonnene Gleichung mit den vorstehenden (372) und (373) in Verbindung bringt;

2) wenn der Querschnitt ω **zwischen den beiden gegebenen Scheidewänden**, also in $\alpha'\beta'$ liegt, indem man gleichfalls in Gl. (372) p, ω, s, z an die Stellen von p'', O'', s'', z'' setzt, aber nur das in $\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2$ multiplizirte Glied, welches die Wirkung der plötzlichen Änderung der Geschwindigkeit beim Durchgange der Flüssigkeit durch die **unterhalb des Querschnittes** ω liegende Scheidewand

mißt, hinwegläßt, und darauf die sich ergebende Gleichung mit den früheren (372) und (373) verbindet;

3) wenn der Querschnitt ω unterhalb sämmtlicher gegebener Scheidewände, also in $\alpha''\beta''$ liegt, indem man, wie vorhin, in Gl. (372) p, ω, s, z an die Stelle von p'', O'', s'', z'' setzt, sämmtliche Glieder der Gleichung beibehält und dieselbe alsdann mit den Gleichungen (372) und (373) kombinirt.

Aus dem Vorstehenden leuchtet ein, wie man zu verfahren habe, wenn statt der zwei angenommenen Scheidewände in der Röhre nur eine einzige oder deren drei oder noch mehr gegeben wären.

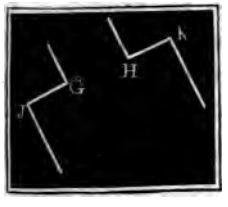
Bei der obigen Untersuchung ist vorausgesetzt, daß sich die Öffnungen GH, G'H' in den Scheidewänden nach oben dergestalt erweitern, daß die Flüssigkeit ohne Kontraktion durch dieselben treten könne. Wären die Scheidewände jedoch ganz eben und dünn; so würde die Flüssigkeit mit Kontraktion durch die Öffnungen GH treten, und zwar hat sich durch Versuche gezeigt, daß die Kontraktion eines Strahles, welcher sich in eine andere unpreßbare Feüssigkeit ergießt, unter denselben Druckverhältnissen dieselbe ist, wie für einen Strahl, welcher in die atmosphärische Luft ausfließt, sodaß also die Kontraktionen, welche jenseit der ebenen Scheidewände stattfinden werden, nach den Angaben der §§. 84 ff. bestimmt wenden können. Hierbei wird noch bemerkt, daß der Kontraktionskoeffizient m für die meisten Fälle der Praxis wird zu 0,61 angenommen werden können. Für den Fall nun, daß eine solche Kontraktion des Strahles beim Durchgange der Flüssigkeit durch die Scheidewände stattfände, sei GH die Öffnung ω_1 in einer solchen Wand und m_1 der entsprechende Kontraktionskoeffizient; alsdann wird $gh = m_1\omega_1$ die Fläche des Querschnittes der größten Kontraktion sein, in welchem die Flüssigkeitsfäden als parallel angesehen werden können. Die durch diesen Querschnitt $m_1\omega_1$ gehende Flüssigkeit muß plötzlich den Querschnitt $JK = \omega_2$ einnehmen. Substituirt man daher in den obigen Formeln die Größe $m_1\omega_1$ für ω_1; so werden dieselben dem Falle entsprechen, wo die Eine

Scheidewand eben iſt. Wäre auch die zweite Scheidewand eben; ſo würde man in ähnlicher Weiſe, wenn m_2 der entſprechende Kontraktionskoeffizient wäre, $m_2\omega_2$ für ω_2 zu ſubſtituiren haben, wodurch das letzte Glied der Gleichung (372)

$$\frac{w}{2g}V^2\left[\left(\frac{\Omega}{m_1\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{m_2\omega_2}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right]$$

werden würde.

Wenn die plötzliche Veränderung der Geſchwindigkeit der Flüſſigkeit an einer Stelle der Röhre nicht gerade durch eine eigentliche Scheidewand, ſondern in der ſeitwärts verzeichneten Weiſe hervorgebracht würde, indem ſich die Röhre bei GH plötzlich bis JK erweiterte, und man annehmen könnte, daß bei dem Austritte der Flüſſigkeit aus dem Querſchnitte GH keine Kontraktion ſtattfände; ſo würde das betreffende Glied in der Gleichung (372) unverändert beizubehalten ſein, indem man $GH=\omega_1$, reſp. ω_3 $JK=\omega_2$, reſp. ω_4 ſetzte.



Kämen ſtatt der eben erwähnten Erweiterungen plötzliche Verengungen nach der ſeitwärts verzeichneten Art in der Röhre vor; ſo würde die Flüſſigkeit mit Kontraktion in den engeren Theil GJKH der Röhre treten. Wäre nun $GH=\omega_1$; ſo wird der Querſchnitt der größten Kontraktion $gh=m_1\omega_1$ ſein. Aus dem letzteren Querſchnitte, in welchem die Fäden der Flüſſigkeit einander parallel ſind, geht dieſelbe plötzlich zu dem Querſchnitte JK über, welcher nahezu $=GH=\omega_1$ geſetzt werden kann. Man wird demnach die Gl. (372) auch für dieſen Fall paſſend machen, indem man überall da, wo eine ſolche Einengung vorkäme, $m_1\omega_1$ an die Stelle von ω_1 und ω_1 an die Stelle von ω_2 ſetzte, wodurch z. B. in jener Gleichung ſtatt der Größe

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$$ die Größe $$\left(\frac{\Omega}{m_1\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2=\left(\frac{1}{m_1}-1\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2$$

und erforderlichen Falls für die Größe

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2 \text{ die Größe } \left(\frac{\Omega}{m_3\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_3}\right)^2=\left(\frac{1}{m_3}-1\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_3}\right)^2$$

zu setzen wäre.

Aus dem Letzteren ersieht man, wie der Fall einer plötzlichen Verengung der Röhre in Folge der Kontraktion des fließenden Strahles auf den Fall einer plötzlichen Erweiterung zurückgeführt werden kann, daß es also im Allgemeinen, wie in §. 55 geschehen, nur erforderlich war, die generellen Gleichungen für den Fall einer plötzlichen Erweiterung der Röhre zu entwickeln.

Endlich ist noch anzumerken, daß wenn die Bewegung der Flüssigkeit einen Beharrungszustand angenommen hat, in Folge dessen sich die Geschwindigkeit derselben in allen Querschnitten der Röhre mit der Zeit nicht ändert, man in Gl. (372)

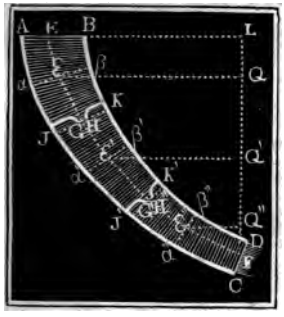
$$\frac{dV}{dt}=o$$

zu setzen habe, wodurch das in diese Größe multiplizirte Glied verschwindet.

Auf eine ähnliche Weise, wie Dies in den §§. 58 bis 70 mit der Gl. (241) geschehen ist, kann man nun auch für die vier dort namhaft gemachten wesentlich verschiedenen Fälle der Bewegung der Flüssigkeit die Gl. (372) behandeln und daraus die Bedingungen für jene Fälle unter den hier neu hinzugekommenen Voraussetzungen entwickeln. Im folgenden werden wir uns jedoch nur mit den beiden für die Praxis wichtigen Fällen beschäftigen, wo sich die Flüssigkeit aus dem untersten Querschnitte Ω der Röhre ergießt, während 1) der obere Spiegel O' auf konstanter Höhe erhalten wird und die Flüssigkeit sich im Beharrungszustande befindet, und 2) der obere Spiegel O' allmählig herabsinkt, sodaß die Röhre sich sukzessive leert.

§. 98. Gleichförmiger Ausfluß einer Flüssigkeit aus der obigen mit Scheidewänden versehenen Röhre, wenn der Oberspiegel der Flüssigkeit auf konstanter Höhe erhalten wird.

Es wird vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit aus dem untersten



Querschnitte $CD = \Omega$ der im vorigen Paragraph betrachteten Röhre entströme, während der obere Spiegel auf konstanter Höhe AB erhalten wird, und daß der Beharrungszustand in der Bewegung der Flüssigkeit eingetreten sei.

Demzufolge hat man hier O' konstant, $O'' = \Omega$, $s' = o$, s'' konstant $= S$, $z' = o$, z'' konstant $= Z$, $\frac{dV}{dt} = o$; mithin statt der Gl. (372), wenn man auch noch annimmt, daß die Pressungen p' und p'' gegen die Endflächen der Flüssigkeit einander gleich seien, nachdem man auf beiden Seiten mit w dividirt hat,

$$Z = \frac{V^2}{2g}\left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_3} - \frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right] \quad \ldots . (375)$$

Die Gl. (373) oder (374) braucht hier nicht weiter berücksichtigt zu werden, da sowol s', wie s'' konstante Größen sind.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt für die Ausflußgeschwindigkeit V

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_3} - \frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2}} \quad \ldots . (376)$$

Man sieht, daß in Folge der Zwischenwände und ähnlicher plötzlicher Verengungen die Ausflußgeschwindigkeit vermindert wird.

In §. 66 und 65 hat man gesehen, daß der Beharrungszustand der ausströmenden Flüssigkeit, wenn keine Zwischenwände mit Öffnungen vorhanden sind, nur dann stattfinden kann, wenn der obere Querschnitt O' des Gefäßes größer ist, als die untere Ausflußöffnung Ω. In dem gegenwärtigen Falle jedoch, bei der Gegenwart von Scheidewänden, lehrt die Formel (376), daß der Werth von V selbst dann noch möglich bleibt, wenn der obere Querschnitt O' um eine gewisse Größe kleiner ist, als die Ausflußöffnung Ω; nur darf der Werth von O', damit der Nenner

in Gl. (376) positiv bleibe, nicht unter eine gewisse Gränze herabsinken, und man muß immer

$$\left.\begin{aligned} &\Omega' > \frac{\Omega}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2}} \\ &\text{oder} \\ &\Omega' > \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2}+\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega_3}-\frac{1}{\omega_4}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (376^a)$$

haben. Umgekehrt, darf die Ausflußöffnung Ω einen gewissen Werth nicht überschreiten, und es muß stets

$$\left.\begin{aligned} &\Omega < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Omega'^2}-\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)^2-\left(\frac{1}{\omega_3}-\frac{1}{\omega_4}\right)^2}} \\ &\text{oder} \\ &\Omega < \frac{\Omega'}{\sqrt{1-\left(\frac{\Omega'}{\omega_1}-\frac{\Omega'}{\omega_2}\right)^2-\left(\frac{\Omega'}{\omega_3}-\frac{\Omega'}{\omega_4}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (376^b)$$

sein.

Was den Druck p der Flüssigkeit in irgend einem Querschnitte ω betrifft; so erhält man nach den Betrachtungen und Vorschriften des vorhergehenden Paragraphs, verbunden mit den im gegenwärtigen Paragraph gemachten Voraussetzungen aus der Gl. (372),

1) wenn der Querschnitt ω oberhalb der höchsten Scheidewand, also in $\alpha\beta$ liegt, (die Querschnitte AB und GH mit eingeschlossen)

$$p'-p+wz=\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\right);$$

mithin

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{\Omega'^2}\right), \quad \ldots\ldots (377)$$

eine Formel, worin V den Werth aus Gl. (376) besitzt;

2) wenn der Querschnitt ω zwischen den beiden gegebenen

Scheidewänden, also in $\alpha'\beta'$ liegt, (die Querschnitte JK und G'H' mit eingeschlossen)

$$p'-p+wz=\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2;$$

mithin

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2\right], \quad \ldots . (378)$$

eine Formel, worin V gleichfalls den Werth aus Gl. (376) hat;

3) wenn der Querschnitt ω unterhalb sämmtlicher gegebener Scheidewände, also in $\alpha''\beta''$ liegt, (die Querschnitte J'K' und CD mit eingeschlossen)

$$p'-p+wz$$

$$=\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\frac{w}{2g}V^2\left[\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right]$$

mithin

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right]$$

$$\ldots . (379)$$

Auch in dieser Formel hat V den Werth aus Gl. (376).

Wenn die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu den Querschnitten $O'=AB$, $\omega_2=JK$, $\omega_4=J'K'$ sehr klein ist, sodaß man die Verhältnisse $\frac{\Omega}{O'}$, $\frac{\Omega}{\omega_2}$, $\frac{\Omega}{\omega_4}$ gegen die übrigen Glieder vernachlässigen kann; so erhält man nach Gl. (376) für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\sqrt{\frac{2gZ}{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}\right)^2}} \quad \ldots . (380)$$

ferner für den hydraulischen Druck

1) in einem Querschnitte $\omega=\alpha\beta$ oberhalb der beiden Scheidewände oder zwischen AB und GH inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\frac{\Omega^2}{\omega^2} \quad \ldots . (381)$$

2) in einem Querschnitte $\omega=\alpha'\beta'$ zwischen den beiden Scheidewänden oder zwischen JK und G'H' inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right] \quad \ldots\ (382)$$

3) in einem Querschnitte $\omega=\alpha''\beta''$ unterhalb der beiden Scheidewände oder zwischen J'K' und CD inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2\right] \quad \ldots\ (383)$$

In den letzten drei Gleichungen hat V den Werth aus Gl. (380).

§. 99. Gleichförmiger Ausfluß aus einer Röhre mit Scheidewänden und plötzlichen Erweiterungen und Verengungen.

Um die in §. 97 gegebenen Andeutungen für den Fall, wo die Röhre ebene Zwischenwände mit Öffnungen, plötzliche Erweiterungen oder Verengungen enthält, an einem Beispiele zu verwirklichen; so nehmen wir unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen an, die Röhre ABDC enthalte

1) bei JK eine Zwischenwand mit einer nach oben gehörig erweiterten Öffnung GH; es sei $GH=\omega_1$, $JK=\omega_2$;
2) bei J'K' eine ebene Zwischenwand mit einer Öffnung G'H', durch welche die Flüssigkeit mit Kontraktion des Strahles tritt; es sei $G'H'=\omega_3$, $J'K'=\omega_4$ und der Kontraktionskoeffizient $=m_3$, sodaß der Querschnitt $g'h'$ der größten Kontraktion $=m_3\omega_3$ ist;
3) bei J''K'' eine plötzliche Erweiterung; es sei $G''H''=\omega_5$, $J''K''=\omega_6$;
4) bei G'''H''' eine plötzliche Verengung, in welche die Flüssigkeit mit Kontraktion tritt; es sei $G'''H'''=J'''K'''=\omega_7$ und der Querschnitt $g'''h'''$ der größten Kontraktion $=m_7\omega_7$.

Nach den Erläuterungen des §s 97 erhält man für die vorstehende Disposition der Röhre statt der Gl. (375) die folgende

$$Z=\frac{V^2}{2g}\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{m_3\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\Omega}{\omega_5}-\frac{\Omega}{\omega_6}\right)^2+\left(\frac{1}{m_7}-1\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_7}\right)^2\right] \quad \ldots . (384)$$

Hieraus folgt für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\sqrt{\frac{2gZ}{\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{m_3\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_5}-\frac{\Omega}{\omega_6}\right)^2+\left(\frac{1}{m_7}-1\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_7}\right)^2}} \quad \ldots . (385)$$

Der hydraulische Druck p in in irgend einem Querschnitte ω ist nach einem dem früheren ganz ähnlichen Verfahren zu bestimmen. Man hat für denselben in einem Querschnitte ω oberhalb GH oder zwischen AB und GH inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right), \quad \ldots . (386)$$

in einem Querschnitte ω zwischen JK und $g'h'$ inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2\right], \quad \ldots . (387)$$

in einem Querschnitte ω zwischen J'K' und G''H'' inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{m_3\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2\right], \quad \ldots . (388)$$

in einem Querschnitte ω zwischen J''K'' und $g'''h'''$ inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\times$$
$$\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{m_3\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_5}-\frac{\Omega}{\omega_6}\right)^2\right], \quad \ldots . (389)$$

und endlich in einem Querschnitte ω unterhalb J'''K''' oder zwischen J'''K''' und CD

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\times$$
$$\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{m_3\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_5}-\frac{\Omega}{\omega_6}\right)^2+\left(\frac{1}{m_7}-1\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega_7}\right)^2\right] \quad \ldots . (390)$$

In den Zwischenräumen, wie zwischen G'H' und J'K' sind für ω die Querschnitte des sich immer mehr kontrahirenden Strahles G'H'k'g' zu setzen.

In den letzteren 5 Gleichungen hat V den Werth aus Gl. (385).

Wenn die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu den Querschnitten $AB = O'$, $JK = \omega_4$, $J'K' = \omega_4$, $J''K'' = \omega_6$ sehr klein ist; so können in den vorstehenden Gleichungen (384) bis (390) die Größen $\frac{\Omega}{O'}$, $\frac{\Omega}{\omega_2}$, $\frac{\Omega}{\omega_4}$, $\frac{\Omega}{\omega_6}$ ohne merklichen Fehler unterdrückt werden.

Wenn der Werth des Druckes p in irgend einem Querschnitte ω **negativ** ausfallen sollte, ein Ereigniß, welches schon in §. 66 näher besprochen ist; so folgt daraus, daß sich die Flüssigkeit unterhalb dieses Querschnittes von den Wänden der Röhre losreißen und dieselbe nicht mehr vollständig erfüllen wird. Wenn ein solches Losreißen vorkommt; so geschieht es gewöhnlich in den Öffnungen oder Querschnitten GH, $g'k'$, G''H'', $g'''k'''$, welche dann zu klein sind und dem resp. nach Gl. (386), (387), (388) oder (389) zu berechnenden Drucke p, welcher in ihnen herrschen soll, einen negativen Werth geben. Die Flüssigkeit bildet alsdann entweder in den unmittelbar darauf folgenden weiteren Theilen der Röhre einen frei fließenden Strahl, oder wenn diese Theile ganz gefüllt bleiben, trennt sich die Flüssigkeit in der Nähe der Ausflußöffnung in der Röhre, indem sie daselbst eine kleinere Ausflußöffnung bildet.

Um für einen solchen Fall den Beharrungszustand der Flüssigkeit zu überblicken, hat man entweder diejenige der Öffnungen GH, $g'k'$, G''H'', $g'''k'''$ oder überhaupt einen Querschnitt ω der Röhre zu ermitteln, welcher der Öffnung CD möglichst nahe liegt und dabei die Eigenschaft hat, daß wenn er als Ausflußöffnung für den darüber liegenden Theil der Röhre angesehen wird, der Druck p in allen höheren Querschnitten positiv bleibe.

Hat man diesen Querschnitt gefunden; so braucht man nur den tiefer liegenden Theil der Röhre ganz außer Betracht zu lassen, und nur den oberen zu berücksichtigen, für welchen der erwähnte Querschnitt die Ausflußöffnung bildet.

§. 100. Ausfluß aus einer Röhre mit Scheidewänden, in welcher der Oberspiegel der Flüssigkeit allmählig herabsinkt.

Wenn die in §. 97 betrachtete Röhre keinen Zufluß hat, sodaß sich der obere Spiegel O′ der Flüssigkeit mit der Zeit immer weiter herabsenkt; so wird man die Formel (372) in Verbindung mit der Beziehung (373) gerade so zu behandeln haben, wie Dies in §. 68 mit der Formel (243) geschehen ist.

Macht man nun die Voraussetzungen, wie in §. 69, daß die Ausflußöffnung Ω ungemein klein sei gegen alle übrigen Querschnitte der Röhre, durch welche man die Bewegung des Oberspiegels O′ beobachten will, und daß die Röhre in dem oberen Theile, soweit man die Senkung jenes Spiegels zu betrachten beabsichtigt, ein vertikal stehendes Prisma von dem konstanten Querschnitte O sei; so ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie in §. 69, wenn man mit ζ die Druckhöhe über der Ausflußöffnung im Anfange der Zeitrechnung, mit Z die Druckhöhe über derselben Öffnung am Ende der Zeit t und mit V die zu dieser Zeit stattfindende Ausflußgeschwindigkeit bezeichnet, daß die letztere Geschwindigkeit gleich der durch Gl. (380) dargestellten, daß also

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (391)$$

sei. Dieser Formel entspricht die Gl. (289) für den Fall, daß keine Scheidewände in der Röhre vorhanden wären; man erhält die vorstehende Gleichung aus der (289), indem man die dortige Druckhöhe Z auf $\frac{Z}{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2}$ reduzirt. Diesemnach erhält man für die Zeit t, während welcher der Spiegel der Flüssigkeit in dem prismatischen oberhalb der Scheidewände belegenen Theile der Röhre von der Druckhöhe ζ bis zur Druckhöhe Z herabsinkt, nach der korrespondirenden Gl. (293)

$$t = \frac{2O}{\Omega\sqrt{2g\left[1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2\right]}}\left(\sqrt{\zeta}-\sqrt{Z}\right) \quad \ldots\ldots (392)$$

§. 101. Ausfluß aus einem mit Zwischenwänden oder sonstigen plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen versehenen Gefäße von beliebiger Gestalt.

Wenn das Gefäß um eine vertikale Axe symmetrisch ist; so leuchtet ein, daß man sämmtliche Formeln der vorhergehenden §§. 97 bis 100 für den Fall des Beharrungszustandes und für den, wo der Oberspiegel allmählig herabsinkt, darauf in Anwendung bringen kann, indem man nur da, wo es erforderlich ist, die Buchstaben s, s', s'' mit z, z', z'' vertauscht. Es wird dabei jedoch vorausgesetzt, daß die untere Ausmündung des Gefäßes nach innen gehörig erweitert und abgerundet sei, sodaß die Flüssigkeit ohne Kontraktion aus derselben treten könne. Wäre Dies nicht der Fall, und befände sich die Ausflußöffnung Ω in einer dünnen horizontalen Wand; so würde man, wenn m den Kontraktionskoeffizienten und λ den Abstand des Querschnittes der größten Kontraktion von der Öffnung Ω bezeichnet, überall $m\Omega$ an die Stelle von Ω und $Z+\lambda$ an die Stelle von Z zu setzen haben. Die letztere Korrektion kann man in den meisten Fällen der Praxis, wo λ im Vergleich zu Z sehr klein ist, unterlassen.

Ist das Gefäß jedoch um eine vertikale Axe nicht symmetrisch; so würde man zwar aus §. 98 die Gleichungen (375) und (376) ohne Weiteres beibehalten können; die Formeln (377) bis (379), welche den Druck in irgend einem Querschnitte ω darstellen, dürfte man jedoch nicht in Anwendung bringen. Nur wenn die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu sämmtlichen Querschnitten des Gefäßes (mit Ausnahme der Öffnungen ω_1 und ω_2 in den Zwischenwänden) ungemein klein wäre, sodaß man die in $\frac{\Omega^2}{\omega^2}$ multiplizirten Glieder vernachlässigen könnte; würde man nach den Gleichungen (380) bis (383) für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\sqrt{\frac{2gZ}{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2}}, \qquad \ldots\ldots (393)$$

für den Druck in einem Punkte oberhalb der beiden Scheidewände

$$p=p'+wz, \qquad \ldots\ldots (394)$$

für den Druck in einem Punkte zwischen den beiden Scheidewänden

$$p = p' + wz - \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 \quad \ldots\ldots (395)$$

und für den Druck in einem Punkte unterhalb der beiden Scheidewände

$$p = p' + wz - \frac{w}{2g} V^2 \left[\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots (396)$$

annehmen können.

Ähnliches gilt von den Formeln des §s 99.

Die Formeln des §s 100 für den Ausfluß aus einem solchen Gefäße, wenn der Spiegel der Flüssigkeit sich senkt, können beibehalten werden, insofern der obere Theil des Gefäßes, in welchem die Bewegung des Spiegels betrachtet wird, ein vertikal stehendes Prisma bildet und die sonstigen Bedingungen jenes Paragraphs erfüllt sind.

Bei dem zuletzt besprochenen Gefäße wird aber ebenfalls vorausgesetzt, daß die Ausflußöffnung Ω von der Art sei, daß die Wasserfäden in parallelen Richtungen aus derselben treten können. Ist Dies nicht der Fall, und ist die Ausflußöffnung in einer dünnen ebenen Wand angebracht, welche sich im Allgemeinen neigen kann, sodaß die Axe des ausfließenden Strahles mit der abwärts gekehrten Richtung der Schwere den Winkel φ bildet; so hat man in allen jenen Formeln $m\Omega$ an die Stelle von Ω und $Z + \lambda \cos\varphi$ an die Stelle von Z zu setzen. Die letztere Korrektion wird in den meisten Fällen, wo $\lambda \cos\varphi$ gegen Z unbedeutend ist, unterbleiben können.

Sollte es sich ereignen, daß die Druckhöhe Z gegen die vertikale Dimension der Ausflußöffnung Ω so bedeutend wäre, daß man ohne merklichen Fehler nicht annehmen könnte, daß die Geschwindigkeit in allen Theilen der Ausflußöffnung gleich, und zwar gleich der wäre, welche sich aus der bis zur Mitte der Öffnung genommenen Druckhöhe ergibt; so würde man in die Nothwendigkeit gesetzt werden, die mittlere Ausflußgeschwindigkeit V_1 zu betrachten. Dieselbe ergibt sich in den vorliegenden Fällen nach den Prinzipien des §s 75 ff. Die hier für die Ausflußgeschwindigkeit V gefundenen und einer näheren Erläute-

rung unterzogenen Formeln unterscheiden sich von denen, auf welche die Prinzipien des §s 75 behuf Bestimmung einer mittleren Ausflußgeschwindigkeit angewandt sind, nur durch einen konstanten Faktor, welchen wir k nennen wollen, sodaß man hier im Allgemeinen

$$V = k\sqrt{2gZ}$$

hat, während dort $V = \sqrt{2gZ}$ gesetzt war. Dieser Faktor ist z. B. aus der Formel (376)

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_3}-\frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2}},$$

aus Gl. (380) ist derselbe

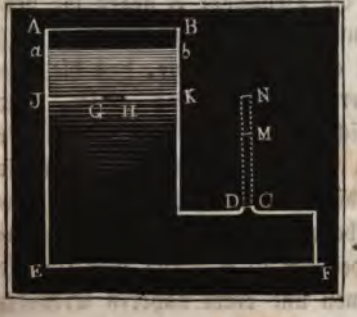
$$k = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2+\left(\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

und s. f.

Hieraus und aus der Formel (317) folgt, daß man für die gegenwärtigen Fälle die mittlere Ausflußgeschwindigkeit für verschiedene Formen der Ausflußöffnung Ω unmittelbar aus den in §. 76 bis 80 entwickelten Formeln ableiten kann, indem man die letzteren mit dem ebenerwähnten Faktor k multiplizirt.

§. 102. Veränderung der Höhe eines aus einem Gefäße mit Zwischenwänden vertikal hervorspringenden Strahles, wenn das Gefäß sich allmählig leert.

ABFE sei ein Gefäß, welches bei **JK** eine horizontale Scheidewand mit der Öffnung **GH** enthält. Bei **CD** befindet sich eine kleine Ausflußöffnung in horizontaler Wand. Das Gefäß hat keinen Zufluß, und während sich die Flüssigkeit aus der Öffnung **CD** ergießt, sinkt der Spiegel ab herab.



Es sei

ω_1 die Öffnung GH und m_1 der zugehörige Kontraktionskoeffizient,
ω_2 der Querschnitt JK,
Ω die Ausflußöffnung CD und m der zugehörige Kontraktionskoeffizient,
Z die veränderliche Druckhöhe über der Ausflußöffnung zu irgend einer Zeit,
x die Höhe des ausspringenden Strahles zu derselben Zeit,
h die Höhe der Scheidewand JK über der Ausflußöffnung CD.

So lange sich der Spiegel ab der Flüssigkeit oberhalb der Scheidewand JK befindet, hat man nach Gl. (380) oder (391) für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{2gZ}{1+\left(\frac{m\Omega}{m_1\omega_1}\right)^2}}.$$

Vermöge dieser Geschwindigkeit wird sich der vertikal nach oben ausspringende Strahl auf die Höhe

$$x = \frac{V^2}{2g} = \frac{Z}{1+\left(\frac{m\Omega}{m_1\omega_1}\right)^2} \qquad \ldots\ (397)$$

erheben, welche kleiner ist, als die Druckhöhe Z.

Sobald nun aber der Spiegel der Flüssigkeit unter die Scheidewand JK herabgesunken ist, wird

$$V = \sqrt{2gZ}$$

die Ausflußgeschwindigkeit und demnach

$$x = \frac{V^2}{2g} = Z \qquad \ldots\ (398)$$

die Höhe sein, auf welche sich der Strahl erhebt.

Hieraus folgt, daß sich der Strahl in dem Augenblicke, wo der Spiegel der Flüssigkeit unter die Zwischenwand JK herabsinkt, plötzlich bis zur Höhe CN dieser Wand erheben wird, während er kurz vorher auf eine niedrigere Höhe CM emporstieg, obgleich doch vorher die Druckhöhe Z im Gefäße größer war, als jetzt.

Setzt man in Gl. (397) $x=h$; so findet man, daß, solange der Spiegel der Flüssigkeit über der Wand JK liegt, die Druckhöhe im Gefäße über der Ausflußöffnung den Werth

$$Z = h\left[1+\left(\frac{m\Omega}{m_1\omega_1}\right)^2\right]$$

haben muß, damit der Strahl bis zur Höhe CN der Wand JK springen kann. Von dem Augenblicke, wo der Spiegel *ab* diese Höhe Z im Gefäße hat, nimmt die Höhe CN des Strahles fortwährend ab, bis der Spiegel *ab* auf die Höhe *h* der Wand JK herabgesunken ist. Die Sprunghöhe CM des Strahles beträgt in diesem Augenblicke nach Gl. (397) den Werth

$$x = \frac{h}{1+\left(\frac{m\Omega}{m_1\omega_1}\right)^2}.$$

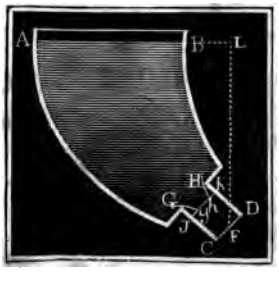
In demselben Augenblicke jedoch sinkt der Spiegel *ab* unter die Zwischenwand JK herab, und der Strahl erhebt sich plötzlich wieder auf die Höhe $CN=h$ jener Wand.

Mariotte hat das vorstehende Resultat der Theorie als wirkliches Phänomen beobachtet und durch die Übereinstimmung beider eine Bestätigung für die Richtigkeit der jener Theorie zu Grunde gelegten Hypothesen geliefert.

Beharrlicher Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem mit einer kurzen Ansatzröhre versehenen Gefäße.

§. 103. Formeln für den Ausfluß durch eine zylindrische oder prismatische Ansatzröhre.

Wenn das seitwärts dargestellte Gefäß ABDC unten mit



einer zylindrischen oder überhaupt prismatischen Ansatzröhre GHDC, durch welche die auf konstantem Niveau AB erhaltene Flüssigkeit ausströmen muß, versehen ist; so wird man die Bedingungen für den Beharrungszustand des Ausflusses nach §. 99 leicht darstellen können. Denn setzt man

Ω gleich der Öffnung GH oder CD,
m gleich dem Kontraktionskoeffizienten für den Durchgang der Flüssigkeit durch die Öffnung GH, also
$m\Omega$ gleich dem Querschnitte gh der größten Kontraktion jenseit der Öffnung GH,
O' gleich der Fläche des Spiegels AB,
Z gleich der Druckhöhe LF über der Mitte der Ausflußöffnung CD und
V gleich der Ausflußgeschwindigkeit in der Öffnung CD;
so leuchtet ein, daß bei gh eine plötzliche Veränderung des Querschnittes von gh auf JK, d. i. von $m\Omega$ auf Ω stattfindet, daß man also nach Gl. (385), da die Flüssigkeit aus der Röhre GHDC, wenn sie lang genug ist, ohne Kontraktion treten wird,

$$V=\sqrt{\frac{2gZ}{\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right)+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}} \qquad \ldots\ldots (399)$$

hat.

Für den zwischen den Querschnitten AB und gh inkl. herrschenden Druck findet man nach Gl. (386)

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \qquad \ldots\ldots (400)$$

und für den zwischen den Querschnitten JK und CD inkl., für welche ω konstant $=\Omega$ ist, herrschenden Druck nach Gl. (390)

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\left[1-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2\right], \qquad \ldots\ldots (401)$$

oder auch, wenn man für V seinen Werth aus Gl. (399) substituirt,

$$p=p'-w(Z-z) \qquad \ldots\ldots (402)$$

Der hydraulische Druck nimmt von CD nach JK ab, und ist in diesem Zwischenraume kleiner, als der äußere Druck p', wofern die Ansatzröhre nicht horizontal ist, in welchem Falle für dieselbe $z=Z$ und der Druck p zwischen JK und CD gleich dem äußeren ist: wäre diese Röhre nach oben gekehrt; so würde sogar $z>Z$ sein, und alsdann der Druck von CD nach JK zunehmen und größer, als der äußere sein.

Wenn der Querschnitt Ω der Ansatzröhre im Vergleich zu der Fläche des Spiegels O' sehr klein ist, sodaß man die Glieder $\frac{\Omega^2}{O'^2}$ in obigen Gleichungen vernachlässigen kann; so ergeben dieselben für die Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2}}\sqrt{2gZ}=\frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}\sqrt{2gZ} \quad \ldots.(403)$$

ferner für den Druck zwischen den Querschnitten AB und gh inkl.

$$p=p'+wz-\frac{w}{2g}V^2\frac{\Omega^2}{\omega^2} \quad \ldots. (404)$$

und für den zwischen den Querschnitten JK und CD inkl. herrschenden Druck

$$p=p'-w(Z-z) \quad \ldots. (405)$$

Wenn man den Druck in dem Theile GHKJ der Ansatzröhre untersuchen will; so hat man in Gl. (404) für ω die Querschnitte des kontrahirten Strahles GHhg und für z die Tiefe eines solchen Querschnittes unter dem Spiegel AB zu substituiren. Setzen wir für die letztere Tiefe in der ganzen Ausdehnung von GH$=\Omega$ bis $gh=m\Omega$ die konstante Größe h, was wegen des geringen Abstandes dieser beiden Querschnitte von der Wahrheit nicht sehr abweichen wird; so ergibt Gl. (404) für den gedachten Zwischenraum, wenn man gleichzeitig für V den Werth aus Gl. (403) einführt,

$$p=p'+wh-\frac{m^2}{m^2+(1-m)^2}\frac{\Omega^2}{\omega^2}wZ \quad \ldots. (405a)$$

und wenn die Röhre horizontal, also $Z=h$ ist,

$$p=p'-\left[\frac{m^2}{m^2+(1-m)^2}\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right]wh \quad \ldots. (405b)$$

Für den Druck im Querschnitte GH$=\Omega$ folgt hieraus

$$p=p'+\frac{(1-m)^2}{m^2+(1-m)^2}wh,$$

woraus man ersieht, daß bei einer horizontalen Ansatzröhre der Druck in der Öffnung GH stets größer sein wird, als der äußere p'. Dieses findet offenbar auch dann statt, wenn die Röhre ansteigt, also $Z < h$ ist. Auch für abfallende Röhren gilt dieser Satz so lange, als Z den Werth $\frac{m^2+(1-m)^2}{m^2}h$ nicht überschreitet.

Um den Druck im Querschnitte gh kennen zu lernen, hat man, wenn die Ansatzröhre horizontal ist, in Gl. (405^b) $\omega = gh = m\Omega$ zu setzen; Dies gibt

$$p = p' - \frac{2m(1-m)}{m^2+(1-m)^2}wh.$$

Hieraus folgt, daß der Druck im Querschnitte gh und also auch in den unmittelbar vorhergehenden Querschnitten, wenn die Röhre horizontal ist, stets kleiner ist, als der äußere Druck p. Dasselbe gilt offenbar auch bei sich senkenden Röhren, für welche $Z > h$ ist; und für ansteigende Röhren findet Dasselbe statt, so lange Z nicht kleiner wird, als $[m^2+(1-m)^2]h$.

Aus diesem letzteren Resultate, wonach der hydraulische Druck im Innern der Ansatzröhre von dem Querschnitte gh nach dem Querschnitte GH bis auf eine gewisse Strecke meistens kleiner ist, als der äußere Druck p, erklärt sich die Erscheinung des Einsaugens von atmosphärischer Luft, welches man beobachtet, sobald man in der Nähe von gh eine feine Öffnung in die Röhrenwand bohrt. Die wenige durch eine so kleine Öffnung in die Röhre dringende Luft wird durch die Bewegung der Flüssigkeit mit fortgerissen, und hindert den Ausfluß nicht; macht man jene Öffnung jedoch größer, sodaß bedeutendere Quantitäten von Luft eintreten können; so hört plötzlich der Ausfluß mit gefülltem Rohre auf, der Strahl reißt sich bei JK von den Röhrenwänden los und ergießt sich frei mit Kontraktion in die Röhre.

Aus den vorstehenden Formeln für V geht hervor, daß sich in Folge der Anbringung einer zylindrischen Ansatzröhre an eine Öffnung $GH = \Omega$ eines Gefäßes die Ausflußgeschwindigkeit vermindert und zwar, wenn die Öffnung im Vergleich zu der Fläche O' des Oberspiegels sehr klein ist, in dem Verhältnisse von $1 : \frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}$. Da hier aber der Strahl ohne Kontrak-

tion aus der Röhre tritt, was, wenn die Röhre nicht vorhanden gewesen wäre, wegen der Verkleinerung des Querschnittes durch die Kontraktion eine Verminderung der Ausflußmenge in dem Verhältnisse von $1:m$ ergeben haben würde; so erkennt man, daß die Ausflußmenge, welche die zylindrische Ansatzröhre liefert, doch größer sein wird, als die, welche eine gleich große Öffnung in einer dünnen Wand bewirkt haben würde.

Es gibt übrigens Fälle, wo die Ansatzröhre nicht ihre volle Wirksamkeit äußern kann, indem sich der Strahl bei JK nicht überall an die Röhrenwände anschließt, sondern sich in irgend einem Punkte von den Wänden losreißt. Dieser Punkt kann sogar bis in den Querschnitt JK zurückfallen, in welchem Falle die Ansatzröhre als solche gar nicht wirkt, und die Flüssigkeit sich aus der Öffnung GH mit Kontraktion ergießt, wie wenn die Röhre GC gar nicht vorhanden wäre.

Um diese Fälle kennen zu lernen, muß zuvörderst bemerkt werden, daß die Ansatzröhre nicht zu kurz sein darf, weil sonst der Strahl mit Kontraktion durch dieselbe springt, ohne ihre Wände zu berühren. Auch wenn man eine solche zu kurze Röhre vor eintretendem Ausflusse der Flüssigkeit vorn verschließt, sodaß die Flüssigkeit Gelegenheit hat, dieselbe zu füllen, wird bei der Eröffnung derselben der kontrahirte Strahl wegen der bedeutend konvergirenden Richtung seiner Fäden doch nicht im Stande sein, sich auf die kurze Entfernung gegen die Umfangswände der Röhre zu legen; derselbe wird die zwischen ihm und den Röhrenwänden augenblicklich abgesperrte Quantität der Flüssigkeit vermöge der Adhäsion der Massentheilchen unter sich aus der Röhre schleudern; die äußere Luft wird nachdringen und der Strahl wird sich mit Kontraktion aus der Öffnung GH ergießen, wie wenn keine Ansatzröhre vorhanden wäre. Das Vorstehende wird eintreten, sobald die Länge der Ansatzröhre nur gleich deren Durchmesser oder kleiner ist. Beträgt die Länge derselben jedoch das $2\frac{1}{2}$ bis 3fache ihres Durchmessers; so wird sich die Flüssigkeit von den Röhrenwänden nicht mehr losreißen und einen unkontrahirten Strahl ausströmen lassen.

Untersuchen wir jetzt die Fälle, wo sich die Flüssigkeit von den Röhrenwänden wegen zu großer Druckhöhe Z trennen wird.

Man erhält den Werth des Druckes p in dem Querschnitte gk der größten Kontraktion, wenn man in Gl. (404) $\omega = m\Omega$ setzt. Dies ergibt, sobald man auch für V den Werth aus Gl. (403) substituirt, und die vertikale Tiefe jenes Querschnittes gk der größten Kontraktion unter dem Spiegel AB der Flüssigkeit mit h bezeichnet,

$$p = p' + wh - \frac{wZ}{m^2 + (1-m)^2}.$$

Damit dieser Werth von p positiv bleibe (vergl. die ähnlichen Untersuchungen in §. 66 und die betreffende Bemerkung in §. 99) muß

$$\frac{wZ}{m^2 + (1-m)^2} < p' + wh$$

oder

$$Z < [m^2 + (1-m)^2]\left(\frac{p'}{w} + h\right) \qquad \ldots\ldots (406)$$

sein.

Hierbei kann die Ansatzröhre sich senken, sodaß $h < Z$ ist, oder sie kann aufwärts steigen, sodaß $h > Z$ ist, oder ihre Ausmündung kann mit ihrer Einmündung in das Gefäß in derselben Höhe liegen, sodaß $h = Z$ ist. Für den letzteren Fall muß

$$Z < [m^2 + (1-m)^2]\left(\frac{p'}{w} + Z\right),$$

d. i.

$$Z = h < \frac{m^2 + (1-m)^2}{2m(1-m)} \cdot \frac{p'}{w} \qquad \ldots\ldots (407)$$

sein.

Liegt also die Ausmündung CD einer sich senkenden oder einer ansteigenden zylindrischen Ansatzröhre *tiefer* unter dem Oberspiegel AB, als

$$Z = [m^2 + (1-m)^2]\left(\frac{p'}{w} + h\right), \qquad \ldots\ldots (408)$$

oder liegt dieselbe für den Fall, daß GH und CD in gleichem Niveau sind, oder daß $Z = h$ ist, tiefer, als

$$Z = h = \frac{m^2 + (1-m)^2}{2m(1-m)} \cdot \frac{p'}{w}; \qquad \ldots\ldots (409)$$

so wird sich die Flüssigkeit in den beiden ersteren Fällen in der durch Gl. (408) gegebenen Tiefe von den Röhrenwänden trennen und die fernere Fortsetzung der Röhre nicht mehr füllen; man wird alsdann auch in der Formel (403) für die Ausflußgeschwindigkeit statt der Größe Z den Werth aus Gl. (408) zu setzen haben. In dem letzteren Falle, wo die in gleicher Höhe liegenden Öffnungen GH und CD eine größere, als die durch Gl. (409) gegebene Druckhöhe über sich haben, wird sich der Strahl schon bei JK von den Röhrenwänden losreißen und sich mit Kontraktion in die Ansatzröhre ergießen, sodaß dieselbe alsdann ganz außer Wirksamkeit tritt.

Befindet sich das ganze Gefäß mit der Röhre im luftleeren Raume, für welchen man $p'=o$ hat; so folgt aus den Formeln (406) und (407), da $m^2+(1-m)^2$ stets <1 ist, weil $m<1$, daß wenn sich die Ansatzröhre senkt oder horizontal bleibt, dieselbe niemals gefüllt werden kann, und daß sich die Flüssigkeit stets als freier Strahl mit Kontraktion durch die Öffnung GH ergießen und die Röhre außer Wirksamkeit setzen wird. Dieses Resultat ist im Vakuum der Luftpumpe wirklich beobachtet worden. Nur wenn die Ansatzröhre so weit ansteigt, daß

$$Z<[m^2+(1-m)^2]h, \qquad \ldots\ldots (410)$$

d. i. für $m=0{,}61$.

$$Z<0{,}52h \qquad \ldots\ldots (411)$$

wird, kann der Ausfluß mit vollem Rohre erfolgen. Steigt die Röhre nicht so weit an; so trennt sich die Flüssigkeit in der Tiefe $Z=[m^2+(1-m)^2]h=0{,}524h$ von den Röhrenwänden, und es wäre alsdann der in dieser Tiefe liegende Querschnitt als Ausflußöffnung anzusehen und die Formel (403) für die Ausflußgeschwindigkeit beizubehalten.

Im lufterfüllten Raume gelten die früheren Bemerkungen, und da hierfür, wenn die Flüssigkeit aus Wasser besteht, $\frac{p'}{w}$ nahezu $=31{,}7$ Fuß ist (s §. 66); so trennt sich für ab- oder aufsteigende Ansatzröhren das Wasser in einer Tiefe

$$Z=[m^2+(1-m)^2](31{,}7+h) \text{ Fuß} \qquad \ldots\ldots (412)$$

oder wenn man m zu 0,61 annimmt, in einer Tiefe

$$Z = 0{,}52\,(31{,}7 + h) = (16{,}48 + 0{,}52h) \text{ Fuß} \quad \ldots\ldots (413)$$

Bei einer horizontalen Ansatzröhre würde sich das Wasser als freier Strahl mit Kontraktion durch die Öffnung GH ergießen, wenn die Druckhöhe mehr, als

$$Z = h = \frac{m^2 + (1-m)^2}{2m(1-m)} \cdot 31{,}7 \quad \ldots\ldots (414)$$

d. i. für $m = 0{,}61$, mehr als

$$Z = h = 0{,}476 \cdot 31{,}7 = 15{,}1 \text{ Fuß} \quad \ldots\ldots (415)$$

betrüge.

Eine Vergleichung dieser Resultate mit den in §. 66 für den Fall gefundenen, wo die Röhre GC mit allmähliger Erweiterung in das Gefäß einmündet, lehrt, daß wenn es darauf ankommt, eine Ansatzröhre auf eine möglichst große Tiefe von der Flüssigkeit erfüllt und dadurch eine möglichst große Ausflußmenge zu erhalten, man die Verbindung dieser Röhre mit dem Gefäße nach der in §. 66 betrachteten Weise vorrichten müsse.

Die vorstehenden Ergebnisse werden übrigens durch die Reibung oder Adhäsion der Flüssigkeit an den Röhrenwänden, deren Wirkung wir weiter unten bei den Röhrenleitungen kennen lernen werden, etwas modifizirt. Wir betrachten im Nachstehenden besonders die Wirksamkeit kurzer Ansatzröhren, bei denen ein Losreißen der Flüssigkeit von den Wänden nicht zu befürchten ist, und auf welche auch die Reibung noch keinen merklichen Einfluß ausübt.

§. 104. Erfahrungen über den Ausfluß des Wassers aus kurzen zylindrischen oder prismatischen Ansatzröhren.

Aus dem vorhergehenden Paragraphe hat man gesehen, daß sich bei dem Erguße einer Flüssigkeit aus einer zylindrischen Ansatzröhre, wenn ihre Länge wenigstens das $2\frac{1}{2}$ bis 3fache ihres Durchmessers beträgt, die Ausflußgeschwindigkeit V kleiner wird, als sie sein würde, wenn die Röhre nicht vorhanden wäre, daß

dagegen die Flüssigkeit ohne Kontraktion aus der Mündung der Röhre tritt.

Um die Ausflußmenge Q aus solchen Röhren, deren Querschnitt Ω im Vergleich zum Oberspiegel O' sehr klein ist, für die Zeiteinheit zu bestimmen, sei der Faktor

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}} = n, \qquad \ldots . (416)$$

sodaß die Ausflußgeschwindigkeit nach Gl. (403)

$$V = n\sqrt{2gZ} \qquad \ldots . (417)$$

ist. Die Ausflußmenge in der Sekunde wird alsdann

$$Q = \frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}\Omega\sqrt{2gZ} = n\Omega\sqrt{2gZ} \qquad \ldots . (418)$$

sein.

Da $\sqrt{2gZ}$ die Ausflußgeschwindigkeit für die Mündung $CD = \Omega$ sein würde, wenn bei der Einmündung in die Ansatzröhre nicht die plötzliche Änderung des Querschnittes vorhanden wäre; so kann man den Faktor n hier auch den Geschwindigkeitskoeffizienten (s. §. 84) nennen, und da $\Omega\sqrt{2gZ}$ die der Geschwindigkeit $\sqrt{2gZ}$ entsprechende Ausflußmenge sein würde; so vertritt jener Faktor nach Gl. (418) auch den früher mit α bezeichneten Ausflußkoeffizienten.

Für die Fälle, wo der Kontraktionskoeffizient m bei dem Eintritte des Wassers in die Ansatzröhre im Mittel 0,61 sein würde, ergibt die Formel (416)

$$n = 0{,}84,$$

während die praktischen Versuche für die entsprechenden Fälle mit Ansatzröhren im Mittel

$$n = 0{,}815, \text{ also } Q = 0{,}815\,\Omega\sqrt{2gZ}$$

ergeben.

Nach den mit horizontalen zylindrischen Ansatzröhren, welche das 3fache des Durchmessers zur Länge hatten, bei Druckhöhen von 0,733 bis 1,912 Fuß von Weisbach angestellten Versuchen haben sich im Mittel folgende Werthe für den Koeffizienten n ergeben,

Weite der Röhren.	0,032	0,064	0,096	0,127 Fuß
$n =$	0,843	0,832	0,821	0,810

woraus folgt, daß die Werthe des Koeffizienten n zunehmen, wenn die Weite der Röhren abnimmt.

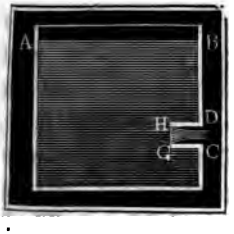
Für kurze parallelepipedische Ansatzröhren hat Weisbach im Mittel $n = 0{,}819$ gefunden.

Mit Berücksichtigung des Reibungswiderstandes, welchen die Bewegung des Wassers bei längeren Ansatzröhren an den Röhrenwänden erfährt, gibt Morin die folgende Tabelle der mittleren Werthe des Koeffizienten n

Verhältniß der Länge der Ansatzröhre zu ihrem Durchmesser	Werth des Koeffizienten n.
2 bis 3	0,82
12	0,77
24	0,73
36	0,68
48	0,63
60	0,60

Bei längeren Ansatzröhren wird man sich der weiter unten für Röhrenleitungen zu entwickelnden Resultate zu bedienen haben.

Wenn die Ansatzröhre in das Gefäß hineinragt, wie in seitstehender Figur, und einen auf ihrer Axe perpendikular stehenden Rand besitzt, dessen Breite wenigstens $\frac{1}{4}$ von dem Durchmesser der Röhre beträgt; so ändert sich hierdurch der Werth des Koeffizienten nicht merklich, und dieser Fall entspricht nahezu demselben, wo der erwähnte Rand in der Erweiterung einer größeren Gefäßwand läge. Ist ein solcher Rand um die Einmündung in die Röhre aber nicht vorhanden; so würde der Einfluß des Wassers in dieselbe, falls sie so kurz wäre, daß sie nicht vom Wasser ganz erfüllt würde, und das Letztere einen freien Strahl bildete, zu der stärksten Kontraktion,



welche man beobachtet, Veranlassung geben. Man würde alsdann für den Kontraktionskoeffizienten $m=0{,}53$ haben. Ist eine solche Röhre jedoch lang genug, daß sie vom Wasser gefüllt wird; so hat man nach den Erfahrungen von Bidone und Weisbach

$$n = 0{,}71$$

zu setzen.

Wenn die Richtung der Axe der Ansatzröhre mit der Normalen auf der Gefäßwand nicht zusammenfällt; so ändert sich nach den Versuchen von Weisbach der mittlere Werth des Koeffizienten n in folgender Weise.

Winkel, welchen die Axe der Röhre mit der Normalen auf der Gefäßwand einschließt.	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$n =$	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Bei dem Gebrauche dieser Werthe von n ist jedoch vorausgesetzt, daß für die Ausflußöffnung Ω in Gl. (418) der normale Querschnitt der Röhre und nicht etwa die Größe des schrägen Durchschnittes derselben mit der Gefäßwand gesetzt werde.

Wenn die Kontraktion, mit welcher das Wasser in die Ansatzröhre tritt, vollkommen sein soll, was bei allen vorhergehenden Angaben vorausgesetzt ist; so muß die Einmündung der Röhre möglichst weit von den Seitenwänden des Gefäßes entfernt liegen. Ist Dies nicht der Fall, ist also die Weite des Gefäßes vor der Ansatzröhre nicht sehr viel größer, als die Weite der Röhre selbst, wie Dies in seitstehender Figur dargestellt ist; so vergrößert sich der Werth von m und damit der von n. Nun kann man den neuen Werth von n aus demjenigen, welcher stattfinden würde, wenn das Gefäß vor der Ansatzröhre

weit genug wäre, erhalten, indem man den letzteren mit einem Korrektionsfaktor β multiplizirt. Die Größe dieſes Faktors β hängt nach Verſuchen von Weisbach von dem Verhältniſſe A ab, in welchem der Querſchnitt GH der Anſatzröhre zu dem unmittelbar vorhergehenden Querſchnitte LM des Gefäßes ſteht, und man kann ſich zur Beſtimmung des fragl. Werthes von β der nachſtehenden von Weisbach gegebenen Tabelle bedienen.

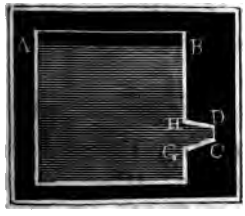
Korrektionsfaktor für zylindriſche Anſatzröhren, wegen unvollkommener Kontraktion.

Werth des Verhältniſſes A.	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
Korrektionsfaktor β.	1,006	1,013	1,020	1,027	1,035	1,043	1,052	1,060	1,070	1,080
Werth des Verhältniſſes A.	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
Korrektionsfaktor β.	1,090	1,102	1,114	1,127	1,138	1,152	1,166	1,181	1,198	1,227

Für prismatiſche Anſatzröhren ſind die Werthe des Korrektionsfaktors für unvollkommene Kontraktion nahezu dieſelben.

§. 105. Erfahrungen über den Ausfluß des Waſſers aus koniſchen Anſatzröhren.

Man hat auch Verſuche über den Ausfluß des Waſſers durch kurze Anſatzröhren angeſtellt, welche eine koniſche Form beſitzen. Wenn dieſe Röhrenſtücke nach der Ausmündung hin konvergent ſind, wie in ſeitſtehender Figur; ſo findet jenſeit der Öffnung CD eine unvollkommene Kontraktion des Strahles ſtatt, deren Koeffizienten wir wieder mit m bezeichnen, ſodaß der Querſchnitt der größten Kontraktion jenſeit der Ausflußöffnung $m\Omega$ iſt. Der Geſchwindigkeitskoeffizient ſei n, ſodaß die Ausflußgeſchwindigkeit im Querſchnitte $m\Omega$ der größten Kontraktion



$$V = n\sqrt{2gZ}$$

iſt. Alsdann wird die Ausflußmenge in der Sekunde

$$Q = mn\,\Omega\sqrt{2gZ} = \alpha\,\Omega\sqrt{2gZ}$$

sein, worin das Produkt $mn = \alpha$ den Ausflußkoeffizienten darstellt.

Nach den Versuchen von D'Aubuisson und Castel ist die nachstehende Tabelle der Werthe für die drei Koeffizienten m, n und α aufgestellt. Diese Versuche sind bei 9,559 Fuß Druckhöhe mit konvergenten Ansatzröhren angestellt, welche eine Ausmündung Ω von 0,049 Fuß Weite und eine 2,6mal so große Länge, also eine Länge von 0,127 Fuß hatten.

Tabelle

der Kontraktions-, Geschwindigkeits- und Ausflußkoeffizienten für den Ausfluß des Wassers durch konisch konvergente Röhren.

Konvergenzwinkel.	Kontraktionskoeffizient m	Geschwindigkeitskoefffizient n	Ausflußkoeffizient $\alpha = mn$
0° 0′	1	0,829	0,829
1° 36′	1	0,866	0,866
3° 10′	1	0,895	0,895
4° 10′	1	0,911	0,911
5° 26′	1	0,924	0,924
7° 52′	0,998	0,932	0,930
8° 58′	0,992	0,942	0,934
10° 20′	0,986	0,951	0,938
12° 4′	0,986	0,955	0,942
13° 24′	0,982	0,963	0,946
14° 28′	0,974	0,966	0,941
16° 36′	0,967	0,970	0,938
19° 28′	0,953	0,970	0,924
21° 0′	0,945	0,972	0,919
23° 0′	0,938	0,974	0,914
29° 58′	0,918	0,975	0,895
40° 20′	0,888	0,980	0,870
48° 50′	0,861	0,984	0,847

Man hat auch mit konisch divergenten Ansatzröhren, deren Ausmündung größer ist, als deren Einmündung, experimentirt. Setzt man bei solchen Röhren in die Formel für die Ausflußmenge $Q = \alpha\,\Omega\sqrt{2gZ}$ für Ω die Einmündung der Röhre, also den kleinsten Querschnitt derselben oder die in dem eigentlichen Behälter angebrachte Öffnung, an welche die Röhre gesetzt ist; so findet man unter gewissen Umständen, daß der Koeffizient α

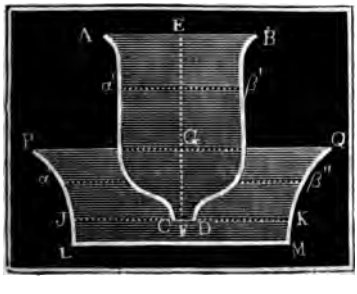
größer werden kann, als 1. Dieſes Reſultat kann übrigens nicht im geringſten befremden, da die eben erwähnte Öffnung durchaus nicht die Ausflußöffnung des mit der Röhre vereinigten Gefäßes iſt. Als ſolche kann immer nur die vordere Ausmündung, alſo im vorliegenden Falle der größte Querſchnitt der Röhre angeſehen werden, und wenn man Dies thut; ſo findet man, daß α immer kleiner iſt, als 1 und daß koniſch divergente Anſatzröhren immer eine kleinere Ausflußmenge ergeben, als koniſch konvergente Röhren, wenn die Ausmündung oder die wahre Ausflußöffnung und der Divergenz- reſp. Konvergenzwinkel bei beiden gleich ſind. Für gleiche Neigungswinkel wird alſo der Werth von α bei divergenten Anſatzröhren ſtets kleiner ſein, als bei konvergenten.

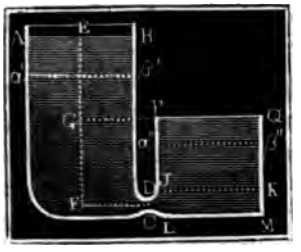
Verſuche von Weisbach mit einem koniſchen Röhrenſtücke, deſſen Weite an dem Einen Ende 0,079, an dem anderen Ende 0,103 Fuß, deſſen Länge 0,287 Fuß und deſſen Konvergenzwinkel $4°50'$ betrug, haben gelehrt, daß bei Druckhöhen von 0,797 bis 10,514 Fuß der Ausflußkoeffizient $\alpha = 0{,}920$ iſt, wenn der Ausfluß durch die engere Mündung erfolgt, daß dagegen $\alpha = 0{,}553$ iſt, wenn der Ausfluß durch die weitere Öffnung ſtattfindet.

Ausfluß einer ſchweren elaſtiſchen Flüſſigkeit aus einem Gefäße, welches unter dem Spiegel eines mit gleicher Flüſſigkeit gefüllten zweiten Gefäßes ausmündet.

§. 106. Beharrlicher Ausfluß aus einem Gefäße, deſſen Ausflußöffnung unter dem Spiegel eines zweiten Gefäßes liegt.

Ein Gefäß ABDC (ſ. die beiden ſeitſtehenden Figuren), deſſen Axe vertikal iſt, werde bis zur Höhe AB beſtändig voll erhalten. Die nach innen gehörig erweiterte und abgerundete Ausflußöffnung CD dieſes Gefäßes, welche einen unkontrahirten Strahl liefert, mündet unter dem ſtets auf derſelben Höhe bleibenden Spiegel PQ eines zweiten Gefäßes PQML,





deſſen Axe gleichfalls vertikal ſteht, aus. Es wird vorläufig angenommen, daß ſich die Querſchnitte der beiden Gefäße nur allmählig ändern, und es ſoll hiernach die Ausflußgeſchwindigkeit in der Öffnung CD, ſowie die hydrauliſchen Preſſungen in den verſchiedenen Querſchnitten der Gefäße beſtimmt werden. Zu dieſem Ende ſei

O' die Fläche des Spiegels AB des oberen Gefäßes,

O'' die Fläche des Spiegels PQ des unteren Gefäßes (bei der Anordnung in der erſteren Figur natürlich unter Abzug des von dem Gefäße PQML eingenommenen Raumes)

Ω die Fläche der Ausmündung CD des oberen Gefäßes,

Ω_1 die Fläche des Querſchnittes JK des unteren Gefäßes, in welchen die aus CD tretende Flüſſigkeit plötzlich übergeht,

ω', ω'' reſp. die Fläche irgend eines horizontalen Querſchnittes $\alpha'\beta'$ in dem Gefäße ABDC und $\alpha''\beta''$ in dem Gefäße PQML (bei der Anordnung in der erſteren Figur nach Abzug des von dem oberen Gefäße eingenommenen Raumes),

z', z'' reſp. die Abſtände des Querſchnittes $\alpha'\beta'$ von AB und $\alpha''\beta''$ von PQ,

Z', Z'' reſp. die Abſtände EF und GF der Öffnung CD von den Spiegeln AB und PQ,

V die Geſchwindigkeit der Flüſſigkeit in der Öffnung CD,

$w = \mu g$ das Gewicht einer Volumeinheit der Flüſſigkeit,

p' der atmoſphäriſche Druck auf die Flächeneinheit, welcher ſich gegen die Oberflächen AB und PQ äußert,

p der hydrauliſche Druck in dem Querſchnitte $\alpha'\beta'$ oder $\alpha''\beta''$ auf die Flächeneinheit.

Man erkennt leicht, daß ſich der hier in Rede ſtehende Fall nur hinſichtlich ſeiner Anwendung von den früher behandelten Fällen eines Beharrungszuſtandes unterſcheidet, daß derſelbe aber hinſichtlich der analytiſchen Darſtellung der dabei vorkommenden Erſcheinungen zu der Klaſſe der bereits früher, namentlich der unter §. 97 ff. unterſuchten Fälle gehört. Dies wird beſonders klar, wenn man ſich die beiden gegebenen Gefäße als ein einziges

denkt, welches sich jenseit des Querschnittes CD nochmals emporhebt, und in welchem die Flüssigkeit gezwungen wird, von dem Querschnitte $CD = \Omega$ plötzlich zu dem Querschnitte $JK = \Omega_1$ überzugehen, was während der Zeiteinheit einen Verlust an lebender Kraft gleich $\frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2 = \frac{w}{2g} V^2 \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2$ verursacht (vergl. die hinsichtlich der Wirkung der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen aufgestellten Prinzipien in §. 55, 57 und 97).

Es gilt also auch hier die Gl. (372), in welcher man für den gegenwärtigen Fall und für die hier gewählte Bezeichnung $p'' = p'$, O' konstant, O'' konstant, $z' = o$, z'' konstant $= EG = Z' - Z''$, $\omega_1 = \Omega$, $\omega_2 = \Omega_1$, $\frac{dV}{dt} = o$, zu substituiren und das in $\left(\frac{\Omega}{\omega_3} - \frac{\Omega}{\omega_4}\right)^2$ multiplizirte Glied außer Acht zu lassen hat.

Hierdurch wird jene Gleichung

$$Z' - Z'' = \frac{V^2}{2g}\left[\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} + \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2\right], \quad \ldots\ldots (419)$$

und es ergibt sich daraus

$$V = \sqrt{\frac{2g(Z' - Z'')}{\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} + \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (420)$$

Damit dieser Ausdruck von V oder überhaupt der ganze in Rede stehende Beharrungszustand des Ausflusses möglich sei, muß der Nenner unter dem Wurzelzeichen einen positiven Werth haben; es muß also

$$\frac{\Omega^2}{O''^2} + \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2 > \frac{\Omega^2}{O'^2}$$

sein. Wenn der Spiegel $PQ = O''$ des unteren Gefäßes kleiner ist, als der Spiegel $AB = O'$ des oberen; so findet diese Ungleichheit jedenfalls statt. Dieselbe ist aber unter allen Umständen, welchen Werth O', O'' und Ω_1 auch haben mögen, zu realisiren, sobald man es in seiner Gewalt hat, die Öffnung $CD = \Omega$ klein genug zu machen. Wenn Ω im Vergleich zu den drei Querschnitten O', O'' und Ω_1 ungemein klein ist, so daß man die

Glieder $\frac{\Omega^2}{O'^2}$, $\frac{\Omega^2}{O''^2}$, $\frac{\Omega}{\Omega_1}$ gegen die Einheit vernachlässigen kann, findet die obige Ungleichheit unter allen Umständen statt.

Was den in irgend einem Querschnitte ω stattfindenden Druck betrifft; so findet man auf ganz ähnliche Weise, wie in §. 98

1) für den Druck p in irgend einem Querschnitte $\alpha'\beta'$ des oberen Gefäßes ABDC

$$p=p'+wz'-\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega'^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \quad \ldots\ldots (421)$$

2) für den Druck in irgend einem Querschnitte $\alpha''\beta''$ des unteren Gefäßes PQML zwischen JK und PQ inkl., indem man beachtet, daß die Tiefe von $\alpha''\beta''$ unter dem Spiegel AB des oberen Gefäßes $=Z'-Z''+z''$ ist,

$$p=p'+w(Z'-Z''+z'')-\frac{w}{2g}V^2\left[\frac{\Omega^2}{\omega''^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(1-\frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2\right], \quad \ldots\ldots (422)$$

eine Gleichung welche sich vermöge der Gl. (419) auch auf

$$p=p'+wz''-\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\omega''^2}-\frac{\Omega^2}{O''^2}\right) \quad \ldots\ldots (423)$$

reduziren läßt.

Nach den letzten beiden Gleichungen hat man für den Druck im Querschnitte JK des unteren Gefäßes, wenn man $\omega''=\Omega_1$ und $z''=Z''$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} &p=p'+wZ'-\frac{w}{2g}V^2\left[\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(1-\frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2\right] \\ &\text{oder auch} \\ &p=p'+wZ''-\frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}-\frac{\Omega^2}{O''^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (424)$$

Die in dem unteren Theile JKML des zweiten Gefäßes unterhalb der Öffnung CD in Ruhe liegenden Querschichten werden offenbar von dem in dem Querschnitte JK herrschenden Drucke, s dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule gedrückt, welche die e, in welcher sie unter der Öffnung CD liegen, zur Höhe Man erhält also den in diesen Schichten zwischen JK und

LM herrschenden Druck, wenn man in der zweiten der beiden Gleichungen (424) z'' an die Stelle von Z'' setzt, also durch die Formel

$$p = p' + w z'' - \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{O''^2} \right) \quad \ldots . \quad (425)$$

Wenn die Verbindungsöffnung Ω der beiden Gefäße im Verhältnisse zu den Querschnitten $AB = O'$, $PQ = O''$, $JK = \Omega_1$ ungemein klein ist; so reduziren sich die vorstehenden Gleichungen auf folgende:

$$V = \sqrt{2g(Z' - Z'')} \quad \ldots . \quad (426)$$

Die Formel (421) für den Druck in irgend einem Querschnitte ω' des oberen Gefäßes wird

$$p = p' + w z' - \frac{w}{2g} V^2 \frac{\Omega^2}{\omega'^2} \quad \ldots . \quad (427)$$

Der Druck zwischen den Querschnitten PQ und JK des unteren Gefäßes ist nach Gl. (422) oder (423)

$$\left.\begin{aligned} &p = p' + w(Z' - Z'' + z'') - \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega''^2} + 1 \right) \\ &\text{oder} \\ &p = p' + w z'' - \frac{w}{2g} \frac{\Omega^2}{\omega''^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (428)$$

Im Querschnitte JK des unteren Gefäßes ist dieser Druck nach Gl. (424)

$$\left.\begin{aligned} &p = p' + w Z' - \frac{w}{2g} V^2 \\ &\text{oder} \\ &p = p' + w Z'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (429)$$

In den Querschnitten unterhalb der Öffnung CD des zweiten Gefäßes hat man nach Gl. (425)

$$p = p' + w z'' \quad \ldots . \quad (430)$$

Die Resultate der Gleichungen (426) bis (430) können auf

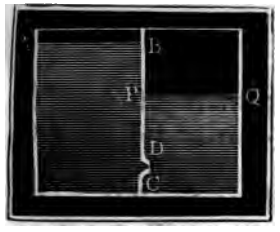
Gefäße von ganz beliebiger Gestalt angewandt werden, vorausgesetzt, daß die Öffnung CD im Vergleich zu den Querschnitten AB, PQ und zu der Weite des zweiten Gefäßes bei JK sehr klein sei. Die Bestimmung des in irgend einem Punkte der beiden Gefäße herrschenden Druckes nach den Formeln (427) und (428) unterliegt jedoch den in §. 73 erwähnten Einschränkungen.

Da der Werth der Geschwindigkeit V nach Gl. (428) und auch nach Gl. (420) eine Funktion des Niveauunterschiedes $Z-Z'$ der Spiegel AB und PQ in den beiden Gefäßen ist, keineswegs aber eine Funktion der Tiefe, in welcher die Öffnung CD unter dem Einen oder dem anderen Spiegel liegt; so folgt, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in allen Punkten der Öffnung CD gleich groß sein wird, wie bedeutend auch die vertikalen Dimensionen dieser Öffnung sein mögen. In den Fällen, wo die Ausmündung eines Gefäßes unter dem Spiegel eines zweiten liegt, wird man also niemals nöthig haben, eine mittlere Ausflußgeschwindigkeit nach Anleitung der §. 75 ff. zu ermitteln, selbst wenn die vertikalen Dimensionen jener Öffnung im Verhältniß zu der Tiefe unter dem Einen oder dem anderen Spiegel bedeutend sind.

Schließlich muß noch bemerkt werden, daß wenn die Durchflußöffnung CD nicht dergestalt nach innen erweitert ist, daß die Flüssigkeit ohne Kontraktion durch dieselbe treten kann, eine Kontraktion des Strahles in dem Maaße stattfinden wird, wie Dies geschehen würde, wenn sich die Flüssigkeit in die freie Luft ergösse. Bezeichnet in einem solchen Falle m den Kontraktionskoeffizienten und $m\Omega$ die Fläche des Querschnittes der stärksten Kontraktion beim Durchflusse durch die Öffnung Ω; so wird man in sämmtlichen Formeln des gegenwärtigen Paragraphes $m\Omega$ an die Stelle von Ω zu setzen, auch sich die Öffnung CD in die Lage des Querschnittes $m\Omega$ verlegt zu denken haben.

§. 107. Fall, wo der Spiegel des ersten Gefäßes auf konstanter Höhe gehalten wird, während der Spiegel des zweiten Gefäßes sich hebt.

Nehmen wir an, der Spiegel AB des ersteren der beiden vorhin betrachteten Gefäße werde auf konstanter Höhe erhalten,



während der Spiegel PQ des zweiten Gefäßes sich durch den Eintritt der Flüssigkeit bei CD allmählig hebt. Zur Vereinfachung der Aufgabe setzen wir voraus, beide Gefäße seien prismatisch, und die Öffnung $CD = \Omega$ sei sowol in Vergleich zu dem Querschnitte O' des ersteren, wie zu dem Querschnitte O'' des letzteren sehr klein.

Unter Beibehaltung aller übrigen Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphes sei Z'' die veränderliche Höhe des Spiegels PQ im zweiten Gefäße über der Öffnung CD am Ende der Zeit t und ζ'' der Werth dieser Höhe in dem Augenblicke, wo man anfängt, die Zeit zu zählen.

Da die Öffnung Ω gegen O' und O'' sehr klein sein soll; so kann man hier offenbar für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Öffnung Ω am Ende der Zeit t nach Gl. (426)

$$V = \sqrt{2g(Z'-Z'')} \qquad \ldots\ldots (431)$$

setzen.

Hiermit ist die Gleichung

$$\Omega V dt = O'' dZ'' \qquad \ldots\ldots (432)$$

zu verbinden, welche ausdrückt, daß die in der Zeit dt aus der Öffnung Ω tretende Ausflußmenge gleich einem Prisma von dem Querschnitte O'' des zweiten Gefäßes und von der Höhe dZ'' ist, um welche sich der Spiegel in diesem Gefäße während der Zeit dt hebt, eine Gleichung, welche hier statt der Gleichung (242ᵃ) steht.

Nach Gl. (432) und (431) hat man

$$dt = \frac{O''}{\Omega}\frac{dZ''}{V} = \frac{O''}{\Omega\sqrt{2g}}\frac{dZ''}{\sqrt{Z'-Z''}},$$

und wenn man diese Gleichung zwischen den Gränzen o und t für t und den Gränzen ζ'' und Z'' für Z'' integrirt,

$$t = \frac{O''}{\Omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta''}^{Z''}\frac{dZ''}{\sqrt{Z'-Z''}},$$

d. i.

$$t=\frac{2O''}{\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{Z'-\zeta''}-\sqrt{Z'-Z''}) \quad \ldots\ldots (433)$$

In der durch diesen Werth von t dargestellten Zeit steigt der Spiegel PQ im zweiten Gefäße von der Höhe ζ'' bis zur Höhe Z'' über der Öffnung CD.

Wenn sich der Spiegel PQ im Anfange der Zeit in der Höhe der Öffnung CD befand, wenn also $\zeta''=o$ ist; so wird

$$t=\frac{2O''}{\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{Z'}-\sqrt{Z'-Z''}) \quad \ldots\ldots (434)$$

Für $Z''=Z'$ erhält man hieraus die Zeit T, welche erforderlich ist, damit der Spiegel PQ bis zur Höhe des Spiegels AB steige, oder bis sich das zweite Gefäß durch die Öffnung CD bis zu der Niveauhöhe des ersten Gefäßes fülle, und dieser Werth von T ist

$$T=\frac{2O''}{\Omega}\sqrt{\frac{Z'}{2g}} \quad \ldots\ldots (435)$$

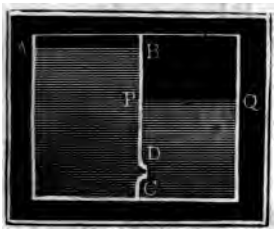
Eine Vergleichung dieser Formel mit der (294) lehrt, daß zur Füllung des zweiten Gefäßes unter den obigen Umständen bis zur Höhe Z', in welcher das erste Gefäß auf konstanter Höhe erhalten wird, dieselbe Zeit erforderlich ist, als zur Ausleerung dieses Gefäßes durch eine gleiche Öffnung Ω, wenn sich der Spiegel desselben anfangs auf derselben Höhe Z' befand.

Wenn das zweite Gefäß nicht vorhanden gewesen wäre; so würde in der Zeit T aus dem ersten Gefäße eine Flüssigkeitsmenge

$$T\Omega\sqrt{2gZ'}=\frac{2O''}{\Omega}\sqrt{\frac{Z'}{2g}}.\Omega\sqrt{2gZ'}=2O''Z',$$

also das Doppelte von dem Quantum ausgeflossen sein, welches sich unter den gegebenen Umständen wirklich aus demselben ergossen hat.

§. 108. Fall, wo der Spiegel des zweiten Gefäßes auf konstanter Höhe erhalten wird, während der



Spiegel des ersten Gefäßes sich senkt.

In diesem Falle, wo beide Gefäße wieder als prismatisch und die Öffnung Ω als sehr klein vorausgesetzt wird, ist Z' die veränderliche Größe, deren Werth für $t=o$ durch ζ' bezeichnet werde.

Man hat auch hier

$$V=\sqrt{2g(Z'-Z'')} \qquad \ldots\ldots (436)$$

und statt Gl. (432)

$$\Omega V dt=-O' dZ' \qquad \ldots\ldots (437)$$

Hieraus folgt

$$dt=-\frac{O'}{\Omega}\frac{dZ'}{V}=-\frac{O'}{\Omega\sqrt{2g}}\frac{dZ'}{\sqrt{Z'-Z''}},$$

also durch Integration

$$t=-\frac{O'}{\Omega\sqrt{2g}}\int_{\zeta'}^{Z'}\frac{dZ'}{\sqrt{Z'-Z''}},$$

d. i.

$$t=\frac{2O'}{\Omega\sqrt{2g}}(\sqrt{\zeta'-Z''}-\sqrt{Z'-Z''}) \qquad \ldots\ldots (438)$$

für die Zeit, während welcher der Spiegel AB im ersten Gefäße von der Höhe ζ' zur Höhe Z' herabsinkt.

Setzt man $Z'=Z''$; so erhält man für die Zeit T, während welcher sich der Spiegel AB bis zur Höhe Z'' des konstanten Spiegels PQ im zweiten Gefäße herabsenkt,

$$T=\frac{2O'}{\Omega}\sqrt{\frac{\zeta'-Z''}{2g}} \qquad \ldots\ldots (439)$$

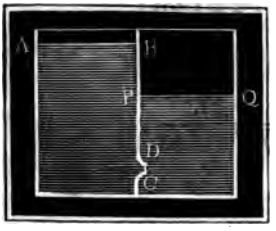
Wäre das erste Gefäß immer bis zur Höhe ζ' voll erhalten; so würde nach Gl. (426) in der Zeit T das Volum

$$T\Omega\sqrt{2g(\zeta'-Z'')} = \frac{2O'}{\Omega}\sqrt{\frac{\zeta'-Z''}{2g}}\cdot\Omega\sqrt{2g(\zeta'-Z'')}$$
$$= 2O'(\zeta'-Z''),$$

mithin würde in dieser Zeit das Doppelte von dem Volum ausgeflossen sein, welches unter den gegebenen Umständen bei der Senkung des Spiegels von der Höhe ζ' bis zur Höhe Z'' des konstanten Spiegels im zweiten Gefäße wirklich ausgeflossen ist.

§. 109. Fall, wo sich der Spiegel im ersten Gefäße senkt, während sich der Spiegel im zweiten Gefäße hebt.

Nehmen wir jetzt an, in dem ersten der beiden früher betrachteten prismatischen Gefäße, welche durch die kleine Öffnung CD miteinander verbunden sind, stehe zu Anfang der Zeitrechnung der Spiegel AB auf der Höhe ζ' über der Öffnung CD, und im zweiten Gefäße stehe der Spiegel PQ auf der geringeren Höhe ζ'' über derselben Öffnung. Keines der Gefäße habe Zufluß von oben. Der Spiegel AB senke sich, und der Spiegel PQ erhebe sich, sodaß der erste am Ende der Zeit t die Höhe Z' und der zweite am Ende derselben Zeit die Höhe Z'' einnehme.



Auch für diesen Fall kann man setzen

$$V = \sqrt{2g(Z'-Z'')}, \qquad \ldots\ (440)$$

und hierzu gesellen sich die Gleichungen

$$\Omega V dt = -O'dZ' = O''dZ'' \qquad \ldots\ (441)$$

Aus der Gleichung

$$-O'dZ' = O''dZ''$$

folgt durch Integration

$$-O'\int_{\zeta'}^{Z'} dZ' = O''\int_{\zeta''}^{Z''} dZ'' \text{ d. i.}$$

$$O'(\zeta' - Z') = O''(Z'' - \zeta''), \quad \ldots\ldots (442)$$

eine Beziehung, die a priori schon einleuchtete. Danach hat man

$$\left.\begin{aligned} Z' &= \frac{O'\zeta' - O''(Z'' - \zeta'')}{O'} \\ \text{und} \\ Z'' &= \frac{O'(\zeta' - Z') + O''\zeta''}{O''} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (443)$$

Wegen der Gleichungen (440) und (441) ist nun ferner

$$\Omega\sqrt{2g(Z' - Z'')}\,.\,dt = -O'dZ'.$$

Hieraus folgt, wenn man auch für Z'' seinen Werth aus der zweiten der Gleichungen (443) substituirt,

$$dt = -\frac{O'}{\Omega\sqrt{2g}}\frac{dZ'}{\sqrt{Z' - Z''}} = -\frac{O'\sqrt{O''}}{\Omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{dZ'}{\sqrt{(O' + O'')Z' - O'\zeta' - O''\zeta''}}$$

und durch Integration, da gleichzeitig $t = o$ und $Z' = \zeta'$ sein muß,

$$t = \frac{2O'\sqrt{O''}}{\Omega(O' + O'')\sqrt{2g}}\left[\sqrt{O''(\zeta' - \zeta'')} - \sqrt{(O' + O'')Z' - O'\zeta' - O''\zeta''}\right] \quad \ldots\ldots (444)$$

Dieser Ausdruck stellt die Zeit dar, in welcher der Spiegel AB im ersten Gefäße von der Höhe ζ' bis zur Höhe Z' herabsinkt.

Nach den Gleichungen (440) und (441) hat man ferner

$$\Omega\sqrt{2g(Z' - Z'')}\,.\,dt = O''dZ''.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man auch für Z' seinen Werth aus der ersten der beiden Gleichungen (443) substituirt,

$$dt = \frac{O''}{\Omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{dZ''}{\sqrt{Z' - Z''}} = \frac{O''\sqrt{O'}}{\Omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{dZ''}{\sqrt{O'\zeta' + O''\zeta'' - (O' + O'')Z''}}$$

und durch Integration, da gleichzeitig $t = o$ und $Z'' = \zeta''$ sein muß,

$$t = \frac{2O''\sqrt{O'}}{\Omega(O' + O'')\sqrt{2g}}\left[\sqrt{O'(\zeta'' - \zeta'')} - \sqrt{O'\zeta' + O''\zeta'' - (O' + O'')Z''}\right] \quad \ldots\ldots (445)$$

Durch diesen Ausdruck wird die Zeit dargestellt, welche darüber verfließt, daß sich der Spiegel PQ im zweiten Gefäße von der Höhe ζ'' bis zur Höhe Z'' erhebt.

Die Zeit T, welche die Flüssigkeit gebraucht, um sich in beiden Gefäßen gleich hoch zu stellen, erhält man, wenn man $Z'=Z''$ setzt. Dies ergibt nach Gl. (442)

$$Z'=Z''=\frac{O'\zeta'+O''\zeta''}{O'+O''}, \qquad \ldots\ldots (446)$$

und wenn man diesen Werth für Z' und Z'' in die obigen Ausdrücke für t einführt,

$$T=\frac{2O'O''}{\Omega(O'+O'')}\sqrt{\frac{\zeta'-\zeta''}{2g}} \qquad \ldots\ldots (447)$$

Auch hier erkennt man, daß während der Zeit T, wo sich die Spiegel beider Gefäße in dasselbe Niveau setzen, nur ein halb so großes Volum Flüssigkeit durch die Öffnung CD fließt, als sich durch dieselbe ergießen würde, wenn die Spiegel in beiden Gefäßen stets auf den ursprünglichen Höhen erhalten wären. Denn in letzterem Falle würde während der Zeit T ein Volum gleich

$$T\Omega\sqrt{2g(\zeta'-\zeta'')}=\frac{2O'O''}{\Omega(O'+O'')}\sqrt{\frac{\zeta'-\zeta''}{2g}}\cdot\Omega\sqrt{2g(\zeta'-\zeta'')}$$
$$=\frac{2O'O''}{O'+O''}(\zeta'-\zeta'')$$

ausfließen; unter den gegebenen Umständen fließt aber nur ein Volum gleich

$$O'(\zeta'-Z')=O'\left(\zeta'-\frac{O'\zeta'+O''\zeta''}{O'+O''}\right)=\frac{O'O''}{O'+O''}(\zeta'-\zeta'')$$

aus.

§. 110. Beharrlicher Ausfluß aus einem Gefäße, dessen Querschnitte sich an manchen Stellen plötzlich ändern, wenn dasselbe unter dem Spiegel eines zweiten Gefäßes ausmündet.

Die in §. 106 angestellte Untersuchung über den Ausfluß aus einem Gefäße ABDC, welches unter dem Spiegel eines

mit gleicher Flüssigkeit gefüllten Gefäßes PQML ausmündet, erleidet keine wesentliche Änderung, wenn das erstere Gefäß einzelne Stellen enthält, wo sich sein Querschnitt plötzlich um endliche Größen ändert, sodaß hier die Flüssigkeit genöthigt wird, ihre Geschwindigkeit augenblicklich zu ändern, was zu Verlusten an lebender Kraft Veranlassung gibt, wie sie in den §§. 97 bis 100 unter verschiedenen Umständen näher betrachtet sind.

Wenn in dem oberen Gefäße z. B. die Flüssigkeit gezwungen wird, an irgend einer Stelle plötzlich aus dem Querschnitte ω_1 zu dem Querschnitte ω_2 überzugehen, was einen Verlust an lebender Kraft $= \frac{w}{2g} V^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ verursacht; so würde man statt Gl. (419)

$$Z' - Z'' = \frac{V^2}{2g}\left[\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots (448)$$

und hieraus

$$V = \sqrt{\frac{2g(Z' - Z'')}{\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2} + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (449)$$

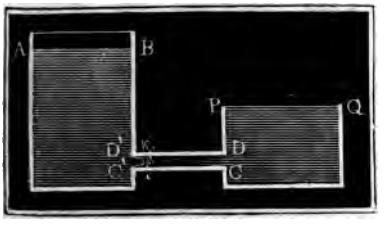
erhalten.

Wäre die Verbindungsöffnung Ω im Verhältniß zu den Querschnitten $AB = O'$, $PQ = O''$, $JK = \Omega_1$ ungemein klein; so würde man sehr nahe

$$V = \sqrt{\frac{2g(Z' - Z'')}{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2}} \quad \ldots\ldots (450)$$

setzen können.

Nehmen wir z. B. an, zwei Gefäße BAC′D′ und PQCD, von denen das Eine bis AB stets voll erhalten werde und das andere in der Höhe PQ stets überfließt, seien durch die verhältnißmäßig enge Röhre D′C′CD miteinander verbunden. Die Flüssigkeit trete bei C′D′ mit Kontraktion in



die Röhre, und dehne sich daselbst von dem Querschnitte der stärksten Kontraktion $c'd'$ plötzlich zum Querschnitte $i'k'=C'D'=CD$ der Röhre aus. Da nun CD oder der Querschnitt der Röhre $=\Omega$ und der entsprechende Kontraktionskoeffizient $=m$ ist; so hat man $c'd'=\omega_1=m\Omega$ und $i'k'=\omega_2=\Omega$, also $\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)^2$ $=\left(\frac{1}{m}-1\right)^2=\left(\frac{1-m}{m}\right)^2$. Hierdurch wird Gl. (450), welche die Durchflußgeschwindigkeit durch die Röhre C'C darstellt,

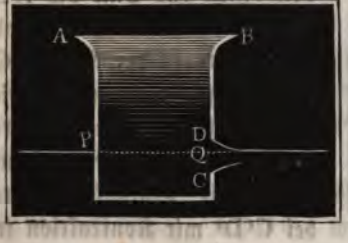
$$V=\frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}\sqrt{2g(Z'-Z'')} \quad \ldots\ldots (451)$$

Hierin stellt $Z'-Z''$, wie früher, den Höhenunterschied der beiden Spiegel AB und PQ dar.

Die vorstehende Formel (451) gibt offenbar die Geschwindigkeit an, mit welcher die Flüssigkeit aus dem ersteren Gefäße vermittelst einer Ansatzröhre C'C ausströmen würde, wenn diese Ansatzröhre nicht in die freie Luft, sondern unter dem Spiegel PQ einer unbegränzten Flüssigkeitsmenge ausmündete. Bezeichnet man den obigen Faktor $\frac{m}{\sqrt{m^2+(1-m)^2}}$ der Formel (451) mit n; so würde man für die Praxis bei dem Ausflusse einer Flüssigkeit unter den zuletzt erwähnten Bedingungen in Gl. (451) statt n die Werthe substituiren können, welche in §. 104 als Erfahrungsresultate mitgetheilt sind.

§. 111. Ausfluß aus einem Gefäße, wenn die Ausflußöffnung nur zum Theil von dem Spiegel eines zweiten Gefäßes bedeckt ist.

Wenn die Ausflußöffnung CD eines in der Höhe AB stets voll erhaltenen Gefäßes nur zum Theil unterhalb des Spiegels PQ eines zweiten Gefäßes läge; so könnte man näherungsweise die Öffnung CD als aus zwei Theilen bestehend ansehen, und die Ausflußmengen für diese beiden Theile für sich berechnen. In dem Theile CQ, welcher von

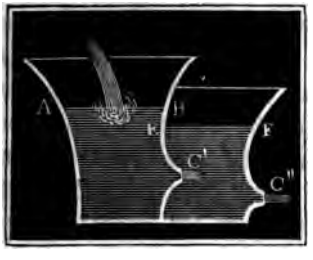


dem Spiegel PQ des unteren Gefäßes ganz bedeckt ist, könnte man die Geschwindigkeit als der Differenz der Höhen AB und PQ entsprechend ansehen, und demnach die Letztere nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphe berechnen. Der Theil QD dagegen wäre wie eine Öffnung zu behandeln, durch welche sich die Flüssigkeit in die freie Luft ergießt.

Durchfluß einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit durch mehrere oben offene Gefäße.

§. 112. Allgemeiner Fall des Durchflusses durch zwei oben offene Gefäße.

Es wird angenommen, zwei oben offene Gefäße kommuniziren durch die Öffnung Ω' bei C′ miteinander, und durch die Öffnung Ω'' bei C″ fließe die Flüssigkeit aus dem zweiten Gefäße ab. Das erste Gefäß hat einen Zufluß, welcher entweder konstant, oder mit der Zeit veränderlich sein kann. Der Einfachheit wegen wird vorausgesetzt, daß die nach innen gehörig erweiterten Öffnungen bei C′ und C″ im Vergleich zu den Querschnitten der Gefäße sehr klein seien.



Der Gegenstand der Aufgabe ist, aus den besonderen Lagen der Spiegel AB und EF der Flüssigkeit in den beiden Gefäßen in einem gegebenen Augenblicke die Lagen derselben in jedem anderen Augenblicke zu bestimmen. Zu diesem Ende bezeichnen

O', O'' resp. die veränderlichen Flächen der Spiegel AB, EF in den Gefäßen,

Ω', Ω'' resp. die Flächen der Öffnungen bei C′ und C″ (findet bei dem Durchgange der Flüssigkeit durch diese Öffnungen Kontraktion statt; so hat man resp. $m'\Omega'$, $m''\Omega''$ für Ω', Ω'' zu setzen, worin m' und m'' die entsprechenden Kontraktionskoeffizienten sind),

ζ', ζ'' resp. die Höhen der Spiegel AB und EF über dem Mittelpunkte der Ausflußöffnung Ω'' im Anfangsaugenblicke der Zeitrechnung,

Z', Z'' resp. dieselben Höhen am Ende der Zeit t,

V', V'' resp. die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit in den Öffnungen Ω' und Ω'' am Ende der Zeit t,

Q das Volum der Flüssigkeit, welche das obere Gefäß während der Zeiteinheit empfangen würde, wenn der Zufluß am Ende der Zeit t plötzlich gleichförmig würde, sodaß Qdt dieses Volum darstellt, welches das obere Gefäß während des Zeitelementes dt am Ende der Zeit wirklich empfängt, eine Größe, welche konstant oder veränderlich sein kann mit der Zeit t.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Öffnung Ω' am Ende der Zeit t ist nach Gl. (426) gleich $\sqrt{2g(Z'-Z'')}$, und in der Öffnung Ω'' ist dieselbe $\sqrt{2gZ''}$. Durch den Zufluß Qdt bei AB hebt sich der Spiegel AB, und durch den Abfluß $\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')}$ bei Ω' senkt sich derselbe; die ganze Höhenvariation, welchen dieser Spiegel in der Zeit dt erleidet, ist aber dZ', eine Größe, welche positiv ist, wenn der Spiegel steigt, und negativ, wenn derselbe sinkt. In ähnlicher Weise hebt sich der Spiegel EF durch den Zufluß $\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')}$ bei Ω' und senkt sich durch den Abfluß $\Omega'' dt\sqrt{2gZ''}$ bei Ω''; demzufolge ändert derselbe in der Zeit dt seine Höhe um dZ'', welche Größe positiv oder negativ ist, jenachdem der Spiegel steigt oder sinkt.

Nach dem Vorstehenden ergeben sich die beiden Fundamentalgleichungen

$$O'dZ' = Qdt - \Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')}, \quad \ldots\ (452)$$

$$O''dZ'' = \Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')} - \Omega'' dt\sqrt{2gZ''}, \quad \ldots\ (453)$$

in welchen die Lösung der Aufgabe enthalten ist.

Nimmt man an, daß der Zufluß, welchen das obere Gefäß erhält, gleichförmig, oder daß Q konstant sei; so ergibt eine Elimination von dt aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$\frac{O'dZ'}{Q-\Omega'\sqrt{2g(Z'-Z'')}} = \frac{O''dZ''}{\Omega'\sqrt{2g(Z'-Z'')}-\Omega''\sqrt{2gZ''}} \quad \ldots\ (454)$$

Substituirt man hierin für O' und O'' ihre Werthe in Z' und Z''; so erhält man eine Beziehung zwischen diesen beiden

Größen, und alsdann vermittelst der beiden vorhergehenden Gleichungen die gesuchten Beziehungen zwischen Z' und t und Z'' und t. Diese Gleichung ist übrigens in einem geschlossenen Ausdrucke nicht integrirbar, auch selbst dann nicht, wenn O' und O'' Konstanten sind.

§. 113. Fall, wo das obere Gefäß keine Flüssigkeit empfängt, während das untere die Flüssigkeit entläßt.

Für diesen Fall ist $Q=o$ und die Gl. (454) reduzirt sich auf

$$-\frac{O'dZ'}{\Omega'\sqrt{(Z'-Z'')}}=\frac{O''dZ''}{\Omega'\sqrt{Z'-Z''}-\Omega''\sqrt{Z''}} \quad \ldots\ldots (455)$$

Wenn O' und O'' konstant sind, wenn also die beiden Gefäße eine prismatische Gestalt haben, und man setzt

$$Z'=xZ'' \text{ und alsdann } x-1=y^2;$$

so kommt erst

$$-\frac{O'(\Omega'\sqrt{x-1}-\Omega'')dx}{O'x(\Omega'\sqrt{x-1}-\Omega'')+O''\Omega'\sqrt{x-1}}=\frac{dZ''}{Z''}$$

und alsdann

$$-\frac{2O'(\Omega'y-\Omega'')ydy}{O'(y^2+1)(\Omega'y-\Omega'')-O''\Omega'y}=\frac{dZ''}{Z''} \quad \ldots\ldots (456)$$

Da in dieser Differenzialgleichung die Veränderlichen getrennt sind; so entspricht sie den Bedingungen der Integrabilität und läßt sich unter endlicher Form integriren.

§. 114. Fall, wo das obere Gefäß keine Flüssigkeit empfängt und das untere keine entläßt.

In diesem Falle, wo man $Q=o$ und $\Omega''=o$ zu setzen hat, reduziren sich die Gleichungen (452) und (453) auf

$$\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')}=-O'dZ'=O''dZ'', \quad \ldots\ldots (457)$$

worin die Höhen Z' und Z'' auf einen beliebigen festen Punkt, etwa auf den Mittelpunkt der Öffnung Ω' bei C' zu beziehen sind.

Diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (440) und (441) des §s 109 genau überein. Wenn O′ und O″ konstant sind, ergibt eine weitere Verfolgung dieser Untersuchung dieselben Formeln, welche wir in jenem Paragraph für einen mit dem vorliegenden ganz identischen Fall bereits entwickelt haben.

§. 115. Fall, wo der Spiegel des oberen Gefäßes stets auf konstanter Höhe erhalten wird, während das untere Gefäß die Flüssigkeit entläßt.

Für diesen Fall, wo man Z′ konstant zu setzen hat, fällt die Gleichung (452) ganz weg, und es bleibt nur die Gl. (453), nämlich

$$O''dZ'' = \Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')} - \Omega'' dt\sqrt{2gZ''} \quad \ldots\ldots (458)$$

Hieraus folgt

$$dt = \frac{O''}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dZ''}{\Omega'\sqrt{Z'-Z''} - \Omega''\sqrt{Z''}}, \quad \ldots\ldots (459)$$

aus welcher Gleichung eine Integration den Werth von t als Funktion von Z″ ergibt.

Nach einer gewissen Zeit nimmt die Flüssigkeit in dem zweiten Gefäße eine konstante Höhe an, deren Werth man findet, wenn man $dZ''=o$ setzt. Es ergibt sich hierfür

$$Z'' = \frac{\Omega'^2 Z'}{\Omega'^2+\Omega''^2} = \frac{Z'}{1+\frac{\Omega''^2}{\Omega'^2}} \quad \ldots\ldots (490)$$

und demnach für den Niveauunterschied der Spiegel AB und EF

$$Z'-Z'' = \frac{\Omega''^2 Z'}{\Omega'^2+\Omega''^2} = \frac{Z'}{1+\frac{\Omega'^2}{\Omega''^2}} \quad \ldots\ldots (491)$$

Die Geschwindigkeiten V′ und V″ resp. in den Öffnungen Ω′ und Ω″ werden alsdann konstant, und man hat

$$V' = \sqrt{2g(Z'-Z'')} = \sqrt{\frac{2gZ'}{1+\frac{\Omega'^2}{\Omega''^2}}} \quad \ldots\ldots (492)$$

$$V'' = \sqrt{2gZ''} = \sqrt{\frac{2gZ'}{1+\frac{\Omega''^2}{\Omega'^2}}} \quad \ldots\ldots (493)$$

§. 116. Fall, wo der Spiegel des oberen Gefäßes stets auf konstanter Höhe erhalten wird, während das untere Gefäß keine Flüssigkeit entläßt.

Für diesen Fall, wo Z' konstant und $\Omega'' = o$ zu setzen ist, fällt die Gl. (452) weg und die Gl. (453) ergibt

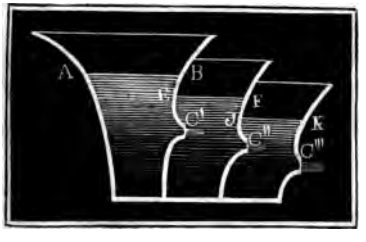
$$O''dZ'' = \Omega' dt \sqrt{2g(Z' - Z'')}, \quad \ldots\ldots (494)$$

worin die Höhen Z' und Z'' auf einen beliebigen festen Punkt, etwa auf den Mittelpunkt der Durchflußöffnung Ω' bei C' zu beziehen sind.

Die vorstehende Gleichung stimmt mit den beiden Gleichungen (431) und (432) aus §. 107, wo bereits der in Rede stehende Fall behandelt ist, vollkommen überein, und liefert demnach die in jenem Paragraphe bereits entwickelten Resultate.

§. 117. Durchfluß einer Flüssigkeit durch drei oben offene Gefäße im Beharrungszustande.

Es ist leicht, die in §. 112 entwickelten Prinzipien auch auf den Fall zu übertragen, wo mehr, als zwei Gefäße gegeben sind. Betrachten wir hier noch den Fall, wo sich die Flüssigkeit durch drei Gefäße ergießt, von denen das erste stets bis zur Höhe AB voll erhalten wird, während das letzte die Flüssigkeit durch die Öffnung bei C''' entläßt. Die Öffnungen bei C', C'' und C''' seien im Vergleich zu den Querschnitten der Gefäße sehr klein, und die Flüssigkeit befinde sich im Beharrungszustande, in welchem die Spiegel AB, EF, JK auf konstanter Höhe verbleiben und die Geschwindigkeiten bei C', C'' und C''' gleichförmig geworden sind. Die Höhen der Spiegel EF und JK werden alsdann durch



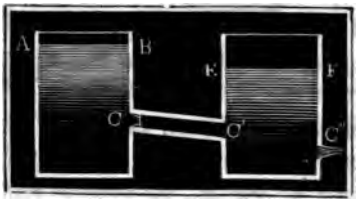
Öffnung Ω' der beiden in §. 112 betrachteten Gefäße mit n' und den für die Ausflußöffnung Ω'' mit n''; so verändern sich dadurch die beiden Gleichungen (452) und (453) auf

$$O'dZ' = Qdt - n'\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')}, \quad \ldots\ldots (503)$$

$$O''dZ'' = n'\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')} - n''\Omega''\sqrt{2gZ''}, \quad \ldots\ldots (504)$$

und man sieht, daß man sämmtliche Resultate der §§. 112 bis 116 beibehalten kann, wenn man darin $n'\Omega'$ und $n''\Omega''$ resp. an die Stelle von Ω' und Ω'' setzt. Durch eine gleichzeitige Substitution von $n'''\Omega'''$ für Ω''' würden auch die Resultate des §s 117 Gültigkeit behalten.

Die beiden Gefäße seien z. B. in der seitstehend verzeichneten Weise angeordnet und durch die Röhre CC' miteinander verbunden, in welche die Flüssigkeit bei C zuvörderst mit Kontraktion eintritt und sich dann plötzlich von dem Querschnitte $m'\Omega'$ der größten Kontraktion zu dem Querschnitte Ω' der Röhre ausdehnt. Das zweite Gefäß entlasse die Flüssigkeit durch die Öffnung Ω'' bei C'' mit vollständiger Kontraktion, deren Koeffizient m'' sei, der Spiegel AB in ersterem Gefäße werde auf der konstanten Höhe Z' über der Ausflußöffnung Ω'' erhalten, und der Ausfluß der Flüssigkeit habe den Beharrungszustand angenommen.



In diesem Falle, wo für das erstere Gefäß $\omega_1 = m'\Omega'$ und $\omega_2 = \Omega'$, also $\frac{\Omega'}{\omega_1} - \frac{\Omega'}{\omega_2} = \frac{1}{m'} - 1$ ist, wird

$$n' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2}} = \frac{m'}{\sqrt{m'^2+(1-m')^2}}.$$

Hiernach hat man in den Formeln des §s 115

$\frac{m'\Omega'}{\sqrt{m'^2+(1-m')^2}}$ an die Stelle von Ω' zu setzen.

Ferner ist hier, weil im zweiten Gefäße keine plötzliche Änderung des Querschnittes vorkommt, $n''=1$; dagegen findet beim Austritte der Flüssigkeit aus der Öffnung Ω'' vollständige Kontraktion statt, weshalb man überall

$$m''\Omega'' \text{ für } \Omega''$$

zu substituiren hat.

Dies ergibt nach Gl. (490) für die Höhe Z'', in welche der Spiegel EF im zweiten Behälter über dem Mittelpunkte der Öffnung bei C'' sich stellen wird,

$$Z''=\frac{Z'}{1+\frac{[m'^2+(1-m')^2]m''^2\Omega''^2}{m'^2\Omega'^2}}, \quad \ldots\ldots (505)$$

ferner für den Höhenunterschied $Z'-Z''$ der Spiegel AB und EF in den beiden Behältern nach Gl. (491)

$$Z'-Z''=\frac{Z'}{1+\frac{m'^2\Omega'^2}{[m'^2+(1-m')^2]m''^2\Omega''^2}} \quad \ldots\ldots (506)$$

Nach Gl. (493) hat man für die Ausflußgeschwindigkeit in der Öffnung Ω''

$$V''=\sqrt{\frac{2gZ'}{1+\frac{[m'^2+(1-m')^2]m''^2\Omega''^2}{m'^2\Omega'^2}}} \quad \ldots\ldots (507)$$

und daher für die Ausflußmenge $Q=m''\Omega''V''$ in der Sekunde

$$Q=m''\Omega''\sqrt{\frac{2gZ'}{1+\frac{[m'^2+(1-m')^2]m''^2\Omega''^2}{m'^2\Omega'^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2gZ'}{\frac{1}{m''^2\Omega''^2}+\frac{m'^2+(1-m')^2}{m'^2\Omega'^2}}} \quad \ldots\ldots (508)$$

Oszillationen einer Säule von einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit.

§. 119. Oszillationen einer Flüssigkeit, welche in einer aus zwei vertikalen Schenkeln bestehenden Röhre enthalten ist.

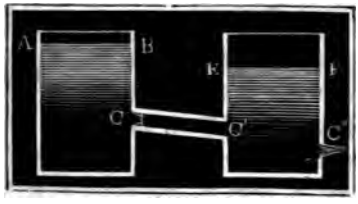
Öffnung Ω' der beiden in §. 112 betrachteten Gefäße mit n' und den für die Ausflußöffnung Ω'' mit n''; so verändern sich dadurch die beiden Gleichungen (452) und (453) auf

$$O'dZ' = Qdt - n'\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')}, \quad \ldots\ldots (503)$$

$$O''dZ'' = n'\Omega' dt\sqrt{2g(Z'-Z'')} - n''\Omega''\sqrt{2gZ''}, \quad \ldots\ldots (504)$$

und man sieht, daß man sämmtliche Resultate der §§. 112 bis 116 beibehalten kann, wenn man darin $n'\Omega'$ und $n''\Omega''$ resp. an die Stelle von Ω' und Ω'' setzt. Durch eine gleichzeitige Substitution von $n'''\Omega'''$ für Ω''' würden auch die Resultate des §s 117 Gültigkeit behalten.

Die beiden Gefäße seien z. B. in der seitstehend verzeichneten Weise angeordnet und durch die Röhre CC' miteinander verbunden, in welche die Flüssigkeit bei C zuvörderst mit Kontraktion eintritt und sich dann plötzlich von dem Querschnitte $m'\Omega'$ der größten Kontraktion zu dem Querschnitte Ω' der Röhre ausdehnt. Das zweite Gefäß entlasse die Flüssigkeit durch die Öffnung Ω'' bei C'' mit vollständiger Kontraktion, deren Koeffizient m'' sei, der Spiegel AB in ersterem Gefäße werde auf der konstanten Höhe Z' über der Ausflußöffnung Ω'' erhalten, und der Ausfluß der Flüssigkeit habe den Beharrungszustand angenommen.



In diesem Falle, wo für das erstere Gefäß $\omega_1 = m'\Omega'$ und $\omega_2 = \Omega'$, also $\frac{\Omega'}{\omega_1} - \frac{\Omega'}{\omega_2} = \frac{1}{m'} - 1$ ist, wird

$$n' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2}} = \frac{m'}{\sqrt{m'^2+(1-m')^2}}.$$

Hiernach hat man in den Formeln des §s 115

$\frac{m'\Omega'}{\sqrt{m'^2+(1-m')^2}}$ an die Stelle von Ω' zu setzen.

$\varpi = \mu g$ das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,
p' der atmosphärische Druck auf die Flächeneinheit der Spiegel AB und PQ.

Es gilt ohne Zweifel auch für diesen Fall die Gl. (243). Unter den hier gemachten Voraussetzungen, für welche man $p'' = p'$, $O' = O'' = \Omega = \omega = 0$, $z'' - z' = Z' - Z''$, und $\int_{s'}^{s''} \frac{ds}{\omega} = \frac{1}{O} \int_{s'}^{s''} ds = \frac{S}{O}$ hat, ergibt sich aus jener Gleichung, nachdem man durch ϖ dividirt hat,

$$Z' - Z'' = \frac{S}{g} \frac{dV}{dt}, \qquad \ldots\ (509)$$

und hiermit hat man statt der Gleichungen (244) und (244ª) die folgenden

$$V dt = - dZ' = dZ'' \qquad \ldots\ (510)$$

zu verbinden, wobei man die Geschwindigkeit V als positiv ansieht, wenn sie in der Richtung ACQ erfolgt, und als negativ, wenn sie in entgegengesetzter Richtung stattfindet.

Aus den letzteren Gleichungen (511), sowie aus direkter Anschauung der Figur folgt

$$-\int_{\zeta'}^{Z'} dZ' = \int_{\zeta''}^{Z''} dZ'' \text{ d. i.}$$

$$\zeta' - Z' = Z'' - \zeta'',$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} Z' &= \zeta' + \zeta'' - Z'' \\ Z'' &= \zeta' + \zeta'' - Z' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ (511)$$

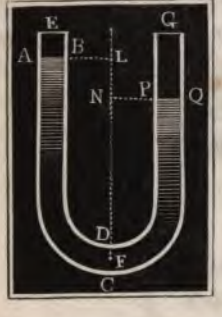
Da nun nach den Gleichungen (510) auch

$$V = - \frac{dZ'}{dt} = \frac{dZ''}{dt},$$

also

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{d^2 Z'}{dt^2} = \frac{d^2 Z''}{dt^2} \qquad \ldots\ (512)$$

In §. 109 ist die Bewegung einer gegebenen Menge einer Flüssigkeit in zwei kommunizirenden Gefäßen unter der Voraussetzung betrachtet, daß die Verbindungsöffnung der beiden Gefäße im Vergleich zu den Querschnitten der Gefäße sehr klein sei. Das Resultat jener Untersuchung war, daß wenn im Anfange der Zeitrechnung der Spiegel in dem Einen Gefäße höher stände, als in dem anderen, jener Spiegel sich senken und dieser sich heben würde, bis am Ende der durch Gl. (447) gegebenen Zeit **T** beide Spiegel sich in einerlei Niveau gesetzt haben würden. In diesem Momente würde alle Bewegung aufhören und die Flüssigkeit in beiden Gefäßen in Ruhe verbleiben, da es nach Gl. (444) z. B. unmöglich sein würde, daß die Höhe **Z'** des ersten Spiegels kleiner würde, als der durch Gl. (446) gegebene Werth, welcher der Höhe beider Spiegel am Ende der Zeit **T** entspricht. Dieses Resultat setzt jedoch, wie schon erwähnt, bestimmt voraus, daß die Verbindungsöffnung zwischen beiden Gefäßen im Vergleich zu den Querschnitten der beiden Gefäße ungemein klein sei. Anders verhält sich die Sache in dem Falle, wo die ebenerwähnte Öffnung im Vergleich zu den Querschnitten der beiden Gefäße einen bedeutenden Werth hat. Wir wollen diesen Fall im Nachstehenden in seiner einfachsten Gestalt näher betrachten, und annehmen, daß die beiden Gefäße durch die beiden vertikalen Schenkel einer umgebogenen Röhre **EFG** von konstantem Querschnitte vertreten werden. Die früher betrachtete Durchflußöffnung **CD** wird jetzt dem Querschnitte der Röhre oder der beiden Gefäße gleich werden. Es sei nun



O der Querschnitt der Röhre,

ξ', ξ'' die Höhen der Spiegel **AB** und **PQ** über einem festen Punkte, z. B. über dem tiefsten Punkte **F** der Axe der Röhre, im Anfange der Zeitrechnung,

Z', **Z''** diese Höhen am Ende der Zeit t,

V die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in irgend einem der überall gleichen Querschnitte der Röhre am Ende der Zeit t,

S die Länge **ACQ** der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit, so daß **O.S** deren Volum darstellt,

$$dt=\sqrt{\frac{s}{2g}}\frac{\frac{dZ'}{\frac{\xi'-\xi''}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{Z'-\frac{\xi'+\xi''}{2}}{\frac{\xi'-\xi''}{2}}\right)^2}},$$

mithin, wenn C eine Konstante bezeichnet

$$t=C+\sqrt{\frac{s}{2g}}\arcsin\frac{2Z'-(\xi'+\xi'')}{\xi'-\xi''}$$

Da man gleichzeitig $Z'=\xi'$ und $t=o$ haben muß; so ergibt sich $C=-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{s}{2g}}$, folglich

$$t=\sqrt{\frac{s}{2g}}\left[\arcsin\frac{2Z'-(\xi'+\xi'')}{\xi'-\xi''}-\frac{\pi}{2}\right]$$

d. i.

$$t=\sqrt{\frac{s}{2g}}\operatorname{ars\,cos}\frac{2Z'-(\xi'+\xi'')}{\xi'-\xi''} \quad \ldots\ldots (516)$$

Hiernach hat man

$$Z'=\tfrac{1}{2}(\xi'+\xi'')+\tfrac{1}{2}(\xi'-\xi'')\cos t\sqrt{\frac{2g}{s}}; \quad \ldots\ldots (517)$$

ferner

$$V=-\frac{dZ'}{dt}=\tfrac{1}{2}(\xi'-\xi'')\sqrt{\frac{2g}{s}}.\sin t\sqrt{\frac{2g}{s}} \quad \ldots\ldots (518)$$

Auf ähnlichem Wege findet sich, wenn man hier

$$-\xi'\xi''+(\xi'+\xi'')Z''-Z''^2=\frac{\xi'-\xi''}{2}\left\{1-\left(\frac{\frac{\xi'+\xi''}{2}-Z''}{\frac{\xi'-\xi''}{2}}\right)^2\right\}$$

setzt,

$$t=\sqrt{\frac{s}{2g}}\arccos\frac{\xi'+\xi''-2Z''}{\xi'-\xi''}, \quad \ldots\ldots (519)$$

$$Z''=\tfrac{1}{2}(\xi'+\xi'')-\tfrac{1}{2}(\xi'-\xi'')\cos t\sqrt{\frac{2g}{s}}, \quad \ldots\ldots (520)$$

ist; so erhält man aus Gl. (509) auch

$$Z'-Z''=-\frac{S}{g}\frac{d^2Z'}{dt^2}=\frac{S}{g}\frac{d^2Z''}{dt^2} \quad \ldots\ldots (513)$$

Substituirt man hierin für Z'' seinen Werth aus der zweiten der Gleichungen (511); so kommt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{d^2Z'}{dt^2}=-\frac{2g}{S}Z'+\frac{g}{S}(\zeta'+\zeta'') \quad \ldots\ldots (514)$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $2dZ'$, und beobachtet, daß $\frac{2dZ'.d^2Z'}{dt^2}$ das erste Differenzial von $\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2$, nämlich $=d\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2$, ferner daß $\frac{dZ'}{dt}=-V$, also $\frac{2dZ'\,d^2Z'}{dt^2}=d\left[\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2\right]$, $=d(V^2)$ ist; so erhält man

$$d(V^2)=d\left[\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2\right]=-\frac{4g}{S}Z'dZ'+\frac{2g}{S}(\zeta'+\zeta'')dZ'.$$

Durch Integration folgt hieraus, wenn man berücksichtigt, daß für $Z'=\zeta'$ die Geschwindigkeit $V=-\frac{dZ'}{dt}=o$ sein muß,

$$V^2=\left(\frac{dZ'}{dt}\right)^2=\frac{2g}{S}(\zeta'^2-Z'^2)-\frac{2g}{S}(\zeta'+\zeta'')(\zeta'-Z') \quad \ldots. (515)$$

Hieraus ergibt sich

$$dt=\sqrt{\frac{S}{2g}}\frac{dZ'}{\sqrt{-\zeta'\zeta''+(\zeta'+\zeta'')Z'-Z'^2}},$$

oder wenn man

$$-\zeta'\zeta''+(\zeta'+\zeta'')Z'-Z'^2=\left(\frac{\zeta'-\zeta''}{2}\right)^2-\left(Z'-\frac{\zeta'+\zeta''}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\zeta'-\zeta''}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{Z'-\frac{\zeta'+\zeta''}{2}}{\frac{\zeta'-\zeta''}{2}}\right)^2\right\}$$

setzt,

$$dt=\sqrt{\frac{s}{2g}}\,\frac{\frac{dZ'}{\frac{\xi'-\xi''}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{Z'-\frac{\xi'+\xi''}{2}}{\frac{\xi'-\xi''}{2}}\right)^2}},$$

mithin, wenn C eine Konstante bezeichnet

$$t=C+\sqrt{\frac{s}{2g}}\,\text{arc sin}\,\frac{2Z'-(\xi'+\xi'')}{\xi'-\xi''}$$

Da man gleichzeitig $Z'=\xi'$ und $t=o$ haben muß; so ergibt sich $C=-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{s}{2g}}$, folglich

$$t=\sqrt{\frac{s}{2g}}\left[\text{arc sin}\,\frac{2Z'-(\xi'+\xi'')}{\xi'-\xi''}-\frac{\pi}{2}\right]$$

d. i.

$$t=\sqrt{\frac{s}{2g}}\,\text{ars cos}\,\frac{2Z'-(\xi'+\xi'')}{\xi'-\xi''} \qquad \ldots\ldots (516)$$

Hiernach hat man

$$Z'=\tfrac{1}{2}(\xi'+\xi'')+\tfrac{1}{2}(\xi'-\xi'')\cos t\sqrt{\frac{2g}{s}}; \qquad \ldots\ldots (517)$$

ferner

$$V=-\frac{dZ'}{dt}=\tfrac{1}{2}(\xi'-\xi'')\sqrt{\frac{2g}{s}}.\sin t\sqrt{\frac{2g}{s}} \qquad \ldots\ldots (518)$$

Auf ähnlichem Wege findet sich, wenn man hier

$$-\xi'\xi''+(\xi'+\xi'')Z''-Z''^2=\frac{\xi'-\xi''}{2}\left\{1-\left(\frac{\frac{\xi'+\xi''}{2}-Z''}{\frac{\xi'-\xi''}{2}}\right)^2\right\}$$

setzt,

$$t=\sqrt{\frac{s}{2g}}\,\text{arc cos}\,\frac{\xi'+\xi''-2Z''}{\xi'-\xi''}, \qquad \ldots\ldots (519)$$

$$Z''=\tfrac{1}{2}(\xi'+\xi'')-\tfrac{1}{2}(\xi'-\xi'')\cos t\sqrt{\frac{2g}{s}}, \qquad \ldots\ldots (520)$$

$$V=\frac{dZ''}{dt}=\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta'')\sqrt{\frac{2g}{s}}\cdot\sin t\sqrt{\frac{2g}{s}} \quad \ldots\ldots (521)$$

Aus Gl. (518) folgt, daß die Geschwindigkeit V für $t=o$ ebenfalls gleich null ist; dieselbe nimmt alsdann mit der Zeit t zu, erreicht ihr Maximum, welches gleich $\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta'')\sqrt{\frac{2g}{s}}$ ist, für $\sin t\sqrt{\frac{2g}{s}}=1$, d. i. für

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{s}{2g}},$$ also nach Gl. (517) und (520) für

$$Z'=Z''=\tfrac{1}{2}(\zeta'+\zeta''),$$

nimmt alsdann wieder ab, und wird wiederum gleich null für

$$t=\pi\sqrt{\frac{s}{2g}},$$ also nach Gl. (517) für

$Z'=\zeta''$ und nach Gl. (520) für

$Z''=\zeta'$.

Hierauf wird V negativ, bis diese Größe nach einem abermaligen Verlauf der Zeit $\pi\sqrt{\frac{s}{2g}}$ für $Z'=\zeta'$ und $Z''=\zeta''$ wieder null wird, und alsdann die vorstehenden Stadien aufs neue durchläuft.

Aus dem eben Gesagten erkennt man, daß die Flüssigkeit in der Röhre isochrone Schwingungen einschlagen wird, bei welchen sich jeder Spiegel, wie AB, abwechselnd bis zur Höhe des anderen Spiegels PQ niederwärts und dann wieder bis zur früheren Höhe AB aufwärts bewegt. Die zu einem solchen Hin- oder Hergange erforderliche Zeit ist

$$T=\pi\sqrt{\frac{s}{2g}} \quad \ldots\ldots (522)$$

Diese Zeit entspricht der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, welches nur sehr kleine isochrone Oszillationen macht, und dessen Länge $=\frac{S}{2}$ ist; bemerkenswerth dabei ist, daß diese Schwingungszeit T von dem anfänglichen Niveauunterschiede $\zeta'-\zeta''=LN$ der Spiegel AB und PQ in den beiden Schenkeln

der Röhre ganz unabhängig ist, und nur von der Gesammtlänge $ACQ = S$ der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeitssäule abhängt.

Der Schwerpunkt der Flüssigkeit beschreibt während der Zeiten $\pi\sqrt{\frac{S}{2g}}$ regelmäßige Pendelschwingungen im unteren Theile der Röhre um den Punkt T, indem er während dieser Zeit von der Höhe

$$\frac{\zeta'^2 - \zeta''^2}{2S} \qquad \ldots\ldots (523)$$

in dem Einen Schenkel herab sinkt und sich in dem anderen Schenkel zu derselben Höhe wieder erhebt.

§. 120. Oszillationen einer Flüssigkeit in einer vertikalen Röhre, welche in ein Gefäß von ungemein großer Oberfläche ausmündet.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo eine vertikal stehende Röhre EC in ein Gefäß ausmündet, dessen oberer Spiegel PQ eine ungemein große Ausdehnung besitzt, sodaß ein Steigen oder Sinken der Flüssigkeit in der Röhre keinen merklichen Einfluß auf die Senkung oder Erhebung des Spiegels PQ hat, und die Höhe des Letzteren als konstant betrachtet werden kann. Bei der Einmündung der Röhre in die untere Flüssigkeit ist Erstere gehörig erweitert, sodaß sowenig beim Heraus-, wie beim Hineintreten der Flüssigkeit in die Röhre eine plötzliche Änderung des Querschnittes oder der Geschwindigkeit stattfindet. Näherungsweise wird die Bewegung der Flüssigkeit in der obigen Röhre der Bewegung des in einem Gefäßbarometer enthaltenen Queckſilbers entsprechen.

Es sei

O der konstante Querschnitt der Röhre in dem Theile AC oberhalb des Spiegels PQ,

ζ die Höhe des Spiegels AB über dem konstanten Spiegel PQ im Anfange der Zeitrechnung,

Z diese Höhe am Ende der Zeit t,

V die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in dem Theile AC der Röhre am Ende der Zeit t,

$w = \mu g$ das Gewicht einer Volumeinheit der Flüssigkeit,

p' der auf den Spiegel AB wirkende konstante Druck für die Flächeneinheit,

p'' der auf den Spiegel PQ wirkende ebenfalls konstante Druck für die Flächeneinheit,

$H = \frac{p''-p'}{w}$ die Höhe einer Flüssigkeitssäule über dem Spiegel PQ, welche sich bei einem Drucke p' auf den Spiegel AB und bei einem Drucke p'' auf den Spiegel PQ im Zustande der Ruhe erhalten würde. Wenn $p'=o$ und $p''=$ dem mittleren atmosphärischen Drucke von 2091 Pfund auf den Quadratfuß wäre; so würde, wenn die Flüssigkeit aus Quecksilber bestände, wovon ein Kubikfuß $w=896$ Pfund wiegt, $H=\frac{2091}{896}=2{,}333$ Fuß sein, und wenn die Flüssigkeit aus Wasser bestände, wovon ein Kubikfuß $w=66$ Pfund wiegt, würde $H=\frac{2091}{66}=31{,}682$ Fuß sein.

Da angenommen wird, daß die Röhre EC ganz dicht unter dem Spiegel PQ ausmünde, sodaß der Theil des Integrales $\int\frac{ds}{w}$ aus Gl. (243), welcher sich auf das unterhalb PQ liegende Stück der Röhre bezieht, gegen den übrigen auf das Stück AC bezüglichen Theil verschwindet, besonders da die Querschnitte des unterhalb PQ liegenden sehr kurzen Röhrenstückes rasch an Größe zunehmen; so kann man in Gl. (243) $z''-z'=Z$, $O'=\Omega=\omega=O$,

$O''=$ unendlich groß, $\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{w}=\frac{1}{O}\int_{s'}^{s''}ds=\frac{Z}{O}$ setzen. Dies ergibt, wenn man mit w dividirt und $\frac{p'-p''}{w}=-H$ setzt,

$$Z-H=\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}Z-\frac{V^2}{2g}, \qquad \ldots\ldots (524)$$

außerdem ist nach Gl. (244)

$$-dZ = V dt \text{ oder } V = -\frac{dZ}{dt} \quad \ldots\ldots (525)$$

Substituirt man in Gl. (524) für dt den Werth $-\frac{dZ}{V}$ aus Gl. (525); so kommt nach gehöriger Reduktion

$$V^2 dZ + 2ZV dV = -2g(Z-H)dZ,$$

d. i.

$$d(V^2 Z) = -2g(Z-H)dZ,$$

also durch Integration

$$V^2 Z = \text{const} - g(Z^2 - 2HZ).$$

Da man gleichzeitig $Z=\zeta$ und $V=o$ haben muß; so ergibt sich

$$\text{const} = g(\zeta^2 - 2H\zeta),$$

also

$$V^2 Z = g[\zeta^2 - 2H\zeta - (Z^2 - 2HZ)]$$

oder auch

$$V^2 Z = g[(\zeta-H)^2 - (Z-H)^2]$$

und hieraus

$$V = -\frac{dZ}{dt} = \sqrt{\frac{g[(\zeta-H)^2-(Z-H)^2]}{Z}} \quad \ldots\ldots (526)$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner

$$dt = -dZ\sqrt{\frac{Z}{g[(\zeta-H)^2-(Z-H)^2]}}, \quad \ldots\ldots (527)$$

eine Gleichung, aus welcher man nach gehöriger Integration die Beziehung kennen lernt, in welcher die Höhe Z des Spiegels AB zur Zeit t steht. Die Integration dieser Gleichung ist jedoch in endlicher Form nicht ausführbar, und hat man die bekannten Methoden der Integration durch Reihen anzuwenden, um das gesuchte Integral zu erhalten.

Einen wesentlichen Aufschluß über die Natur der Bewegung, welche der Spiegel AB annehmen wird, liefert inzwischen die Gl. (526). Aus derselben erkennt man,

1) daß die Geschwindigkeit V für $Z=\zeta$ gleich null sei, was sich nach der gemachten Voraussetzung von selbst verstand;

$$z^{n-1}\sqrt{1-z^2} = (n-1)\int \frac{z^{n-2}dz}{\sqrt{1-z^2}} - n\int \frac{z^n dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

und demnach

$$o = (n-1)\int_{+1}^{-1} \frac{z^{n-2}dz}{\sqrt{1-z^2}} - n\int_{+1}^{-1} \frac{z^n dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

oder

$$\int_{+1}^{-1} \frac{z^n dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{n-1}{n}\int_{+1}^{-1} \frac{z^{n-2}dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ist; so reduzirt sich der obige Werth von T, wenn man auf die einzelnen Glieder desselben die vorstehende Reduktionsformel anwendet, indem man darin sukzessive $n=2, 3, 4, 5 \ldots$ setzt, und hierdurch die Integrale der einzelnen Glieder jener Formel auf solche herabbringt, welche gewisse Vielfache von $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ oder von $\int \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}$ sind; so erhält man

$$T = \sqrt{\frac{H}{g}} \int_{+1}^{-1} \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} \times$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4}a^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6.8}a^4 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{7.9}{8.10.12}a^6 - \text{etc.}\right]$$

$$+\sqrt{\frac{H}{g}} \int_{+1}^{-1} \frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}} \left[\frac{1}{2}a + \frac{1}{4.6}a^3 + \frac{7}{6.8.10}a^5 + \frac{9.11}{8.10.12.14}a^7 + \text{etc.}\right].$$

Da nun $\int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arccos z$, also

$$\int_{+1}^{-1} \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arccos(-1) - \arccos(+1) = \pi$$

und $\int \frac{-zdz}{\sqrt{1-z^2}} = \sqrt{1-z^2}$, also

$$\int_{+1}^{-1} \frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = o$$

ist; so wird, wenn man wieder $a = \frac{\zeta - H}{H}$ setzt,

$$T = \pi\sqrt{\frac{H}{g}} \times$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\frac{\xi-H}{H}\right)^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6.8}\left(\frac{\xi-H}{H}\right)^4 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{7.9}{8.10.12}\left(\frac{\xi-H}{H}\right)^6 - \text{etc.}\right]$$

.... (528)

Durch diese Formel wird die Zeit ausgedrückt, welche der Spiegel AB der Flüssigkeitssäule gebraucht, um von seiner größten Höhe ξ bis zu seiner geringsten Höhe $H - (\xi - H) = 2H - \xi$ herabzusinken, oder umgekehrt, von dieser Höhe bis zu jener anzusteigen. Diese Zeit ist abhängig von der ursprünglichen Höhe ξ, oder vielmehr von dem Höhenunterschiede $\xi - H$, um welche der Spiegel AB anfänglich höher lag, als der oberste Punkt einer Flüssigkeitssäule von der Höhe H. Wenn jedoch dieser Höhenunterschied sehr gering, oder wenn ζ nahezu gleich H ist, sodaß man die in $\left(\frac{\xi - H}{H}\right)^2$ und höhere Potenzen von $\frac{\xi - H}{H}$ multiplizirten Glieder gegen die Einheit vernachlässigen kann; so wird T von jenem Unterschiede unabhängig, und die Zeitdauer derartiger sehr kleiner Oszillationen der Flüssigkeitssäule AC reduzirt sich auf

$$T = \pi\sqrt{\frac{H}{g}}, \qquad \ldots. (529)$$

also auf die Schwingungszeit eines einfachen Pendels von der Länge H, wobei $H = \frac{p'' - p'}{w}$ die Höhe einer gleichartigen Flüssigkeitssäule darstellt, welche unter der Wirkung der äußeren Pressungen p' und p'' resp. gegen die Spiegel AB und PQ im Gleichgewichte erhalten wird.

Von dem Gesammtdrucke, welchen ein Gefäß, in dem sich eine schwere unpreßbare Flüssigkeit bewegt, auszuhalten hat.

§. 121. Allgemeine Betrachtungen über diesen Druck.

In den früheren Paragraphen haben wir unter verschiedenen Umständen den hydraulischen Druck p bestimmt, welcher sich in irgend einem Punkte einer in Bewegung begriffenen Flüssigkeit auf die Flächeneinheit äußert. Die Formel (245) und (247) ergibt den allgemeinen Werth dieses Druckes p in dem Falle, wo sich die Flüssigkeit in einer engen Röhre bewegt, indem die Wirkung der Reibung der Flüssigkeit an den Röhrenwänden (vergl. §. 55), sowie die Wirkung der Zentrifugalkraft (vergl. §. 56) außer Acht gelassen wird. Wenn der Punkt der Flüssigkeit, in welchem man jenen Druck bestimmen will, an der Röhrenwand liegt; so erfährt man durch die erwähnte Formel den Druck für die Flächeneinheit, welchen an der fraglichen Stelle die Wand der Röhre in normaler Richtung auszuhalten hat, und es würde, wenn die Gleichung für die Oberfläche dieser Wand gegeben wäre, leicht sein, den Druck zu bestimmen, welcher sich auf irgend ein endliches Stück derselben äußerte.

Im Nachstehenden wollen wir jedoch den Gesammtdruck oder die Resultante aller Pressungen betrachten, welchen das Gefäß, in dem sich die Flüssigkeit befindet, zu ertragen hat. Es leuchtet ein, daß eine diesem Gesammtdrucke gleiche und der Richtung nach direkt entgegengesetzte Kraft von außen auf das Gefäß angebracht werden müßte, um das Letztere an dem Orte im Raume, wo es sich eben befindet, im Zustande der Ruhe zu erhalten. Dabei kann es sich ereignen, daß der fragliche Gesammtdruck nicht in einer *einzigen* Kraft besteht. Wenn man nämlich alle Pressungen, welche sich auf das Gefäß äußern, in ihre Komponenten parallel zu drei rechtwinklige Axen zerlegt, und von einem jeden dieser drei Systeme von parallelen Kräften die Mittelkraft bestimmt; so ist es möglich, daß sich diese drei partiellen Mittelkräfte nicht in Ein und demselben Punkte durchschneiden, sich also auch nicht zu einer einzigen Resultante zusammensetzen lassen. Immer wird es nach den bekannten Prinzipien der Statik jedoch thunlich sein, jene drei partiellen Mittelkräfte wenigstens in *zwei* zusammen-

zusetzen. Wir werden uns bei der nachfolgenden Untersuchung darauf beschränken, die Größe der erwähnten nach drei rechtwinkligen Axen genommenen Mittelkräfte anzugeben.

Dabei nehmen wir an, der auf jede Flächeneinheit der oberen und unteren Endfläche der Flüssigkeit sich äußernde Druck sei derselbe, also $p' = p''$, und überhaupt sei das ganze Gefäß von einer elastischen Flüssigkeit, z. B. der Atmosphäre, welche in allen Punkten die Spannkraft $p' = p''$ besitzt, umgeben. Da alsdann der hydraulische Druck, welcher in jeder der beiden Endflächen der Flüssigkeit herrscht, gleich dem äußeren atmosphärischen ist, und die Festigkeit des Materiales der Gefäßwände in allen übrigen Punkten fähig ist, dem atmosphärischen Drucke, welcher sich überall in normaler Richtung gegen diese Wände von außen äußert, zu widerstehen; so leuchtet zuvörderst ein, daß der Druck der äußeren Luft rings um das Gefäß mit dem hydraulischen Drucke der Flüssigkeit in den beiden Endflächen und mit dem Widerstande der Gefäßwände nach außen vollkommen im Gleichgewichte sein wird, daß also diese Kräfte bei der Ermittelung des Gesammtdruckes, welchen das Gefäß durch die darin befindliche Flüssigkeit zu ertragen hat, ganz vernachlässigt werden können.

Um nun der Bestimmung des obigen Gesammtdruckes auf das Gefäß oder der drei Resultanten desselben nach drei rechtwinkligen Axen näher zu treten; so beachte man Folgendes.

Wenn in ein Körpertheilchen M gewisse stetige Kräfte wirken, deren Resultante P ist, und es soll dasselbe im Zustande der Ruhe oder in dem einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung erhalten werden; so ist es erforderlich, daß auf das Theilchen M noch eine andere Kraft Q, welche der P gleich und direkt entgegengesetzt ist, von außen angebracht werde. Ist nun das Theilchen nicht isolirt im Raume, sondern von anderen Theilchen oder von einer Unterlage umgeben; so ist klar, daß diese Unterlage in der Richtung der Kraft Q dem Theilchen M mit einer Kraft = P *widerstehen* muß, oder daß die in diesem Theilchen wirkenden Kräfte auf die Unterlage einen *Druck* ausüben, welcher der Kraft P sowol an Größe, wie an Richtung gleich sein wird. Ist die in das Theilchen wirkende Kraft z. B.

nur die Schwere; so hat die Unterlage in vertikaler Richtung nach unten einen Druck auszuhalten, welcher gleich dem Gewichte des Theilchens ist.

Wenn dagegen das Theilchen M unter der Einwirkung der Kraft P gezwungen werden soll, sich in irgend einer beliebigen Richtung MN mit der veränderlichen Geschwindigkeit v fortzubewegen; so ist es gleichfalls erforderlich, daß von außen auf das Theilchen eine Kraft Q angebracht werde, welche, wenn sie mit der Kraft P zusammengesetzt wird, eine Resultante R liefert, die im Stande ist, dem Theilchen M die in Rede stehende Geschwindigkeit in der Richtung MN mitzutheilen. Wenn aber die Masse des Theilchens M gleich m ist; so muß bekanntlich die Kraft, welche demselben die Geschwindigkeit v in direkter Richtung mitzutheilen vermag, gleich $m\frac{dv}{dt}$ sein, und man sieht, daß die Kraft Q aus der Bedingung zu bestimmen sei, daß die Resultante R von ihr und von der Kraft P der Größe nach $= m\frac{dv}{dt}$ sei und der Richtung nach mit der Linie MN zusammenfalle.

Diese Kraft Q wird alsdann, wie vorhin, den Widerstand darstellen, welchen eine etwaige Unterlage oder die übrigen umgebenden Massentheilchen gegen das Theilchen M leisten müssen. Stellt man übrigens durch Q_1 den Druck dar, welchen die auf das Theilchen M wirkenden Kräfte P unter den obigen Umständen auf die Unterlage äußern werden; so ist ebenso klar, daß Q_1 der Kraft Q an Größe gleich, an Richtung entgegengesetzt und außerdem die Resultante der Kraft P und der in entgegengesetzter Richtung genommenen Kraft R oder $m\frac{dv}{dt}$ sei.

Sind demnach resp. α, β, γ die Winkel, welche die Richtung MN der Bewegung des Theilchens mit drei rechtwinkligen Axen der x, der y, der z einschließt, ferner λ, μ, ν die Winkel, welche die Richtung PM der Kraft P mit denselben Axen bildet, und

endlich φ, ψ, χ die Winkel, welche die Richtung Q_1M des Druckes Q_1 mit jenen Axen einschließt; so hat man

$$\left.\begin{aligned} Q_1\cos\varphi &= P\cos\lambda - m\frac{dv}{dt}\cos\alpha,\\ Q_1\cos\psi &= P\cos\mu - m\frac{dv}{dt}\cos\beta,\\ Q_1\cos\chi &= P\cos\nu - m\frac{dv}{dt}\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (530)$$

worin resp. $Q_1\cos\varphi$, $Q_1\cos\psi$, $Q_1\cos\chi$ die Komponenten des Druckes Q_1 in der Richtung der drei Axen darstellen.

Man erkennt leicht, daß es ganz und gar nicht erforderlich ist, daß der Widerstand Q, welcher sich gegen das Theilchen M äußern muß, durch eine einzige Kraft hervorgebracht werde. Es kann hierzu ein ganzes System von Kräften konkurriren, welche rings um das Theilchen vertheilt sind; nur ist es nothwendig, daß Q die Resultante dieses ganzen Systemes sei. Diese Bemerkung bezieht sich besonders auf den Fall, wo sich das Theilchen inmitten einer Flüssigkeit befindet, welche rings um dasselbe gewisse Pressungen ausübt. Die Resultante aller dieser Pressungen muß gleich Q sein, oder es wird sich von dem Theilchen M immer ein Überfluß des Druckes, welcher gleich Q_1 ist und in der Richtung Q_1M wirkt, fortpflanzen. Nimmt man die Werthe dieses Druckes Q_1 für alle Massentheilchen einer in einem Gefäße befindlichen Flüssigkeit, und setzt dieselben nach den Prinzipien der Statik zusammen; so erhält man offenbar den Gesammtdruck, welchen das Gefäß von der Flüssigkeit zu ertragen hat.

Wenn sich in der Flüssigkeit einige Stellen befänden, wo die Theilchen derselben ihre Geschwindigkeit sowol der Größe, wie der Richtung nach plötzlich um endliche Größen ändern müßten; so kann man den hieraus entspringenden Druck auf das Gefäß folgendermaaßen bestimmen.

Angenommen, das Körpertheilchen M von der Masse m, welches sich in der Richtung OM mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt, werde während der ungemein kleinen Zeit dt von seiner Richtung abgelenkt und gezwungen, die Richtung MN einzuschlagen, welche sich unter dem Winkel $NMN' = \vartheta$ gegen die ursprüng-

liche neigt, während gleichzeitig seine Geschwindigkeit in v_2 übergeht. Zur Bestimmung der Kraft Q, welche im Stande ist, diese plötzliche Veränderung hervorzubringen, bemerkt man, daß das Theilchen M in der Richtung OMN' während der Zeit dt die Geschwindigkeit $v_1 - v_2 \cos\vartheta$ verliert, während dasselbe in dieser Zeit in perpendikularer Richtung zu ON' die Geschwindigkeit $v_2 \sin\vartheta$ gewinnt. Bezeichnet man nun den Neigungswinkel OMN' mit η; so leuchtet ein, daß der zuerst erwähnte Verlust an Geschwindigkeit durch die Komponente $Q\cos\eta$ und der letztere Gewinn an Geschwindigkeit durch die Komponente $Q\sin\eta$ der Kraft Q hervorgebracht werden muß. Weil ferner jener Verlust $v_1 - v_2\cos\vartheta$ an Geschwindigkeit während der sehr kleinen Zeit dt erlangt wird, und angenommen werden kann, daß dieser Verlust gleichförmig mit der Zeit dt zugenommen habe; so kann man behaupten, die Komponente $Q\cos\eta$ müsse eine Kraft sein, welche im Stande ist, der Masse m während der Zeiteinheit bei stetiger Einwirkung auf dieselbe eine Geschwindigkeit $= \frac{v_1 - v_2\cos\vartheta}{dt}$ gleichförmig zu ertheilen. Hiernach hat man nach bekannten Gesetzen der Mechanik

$$Q\cos\eta = m \cdot \frac{v_1 - v_2\cos\vartheta}{dt},$$

und in ähnlicher Weise für die andere Komponente $Q\sin\eta$, welche während der sehr kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit $v_2\sin\vartheta$, also während der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{v_2\sin\vartheta}{dt}$ mittheilt,

$$Q\sin\eta = m \cdot \frac{v_2\sin\vartheta}{dt}.$$

Da nun Q den Widerstand bezeichnet, welchen das Theilchen M in der Richtung QM erleiden muß, während Q_1 den Druck darstellt, welchen jenes Theilchen in direkt entgegengesetz-

ter Richtung $Q_1 M$ unter den vorstehenden Voraussetzungen ausübt; so hat man auch

$$\left.\begin{aligned} Q_1 \cos\eta &= m \cdot \frac{v_1 - v_2 \cos\vartheta}{dt}, \\ Q_1 \sin\eta &= m \cdot \frac{v_2 \sin\vartheta}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (531)$$

worin η auf den Winkel OMQ_1 bezeichnet.

Man begreift, daß in diesen Formeln für m diejenige Masse zu substituiren ist, welche während der ganzen Zeit dt der obigen plötzlichen Geschwindigkeitsveränderung ausgesetzt wird.

Fände nur eine Veränderung der Geschwindigkeit des Theilchens M in der ursprünglichen Richtung seiner Bewegung, und keine Ablenkung von dieser Richtung statt; so hätte man $\vartheta = o$, also einfach

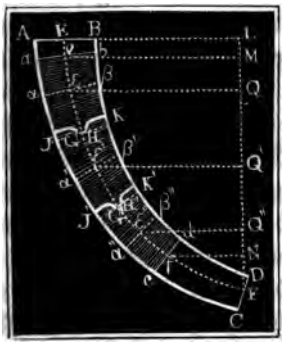
$$Q_1 \cos\eta = m \cdot \frac{v_1 - v_2}{dt}$$

$$Q_1 \sin\eta = o,$$

woraus $\eta = o$ und

$$Q_1 = m \frac{v_1 - v_2}{dt} \quad \ldots\ldots (532)$$

folgt, sodaß sich alsdann bloß ein Druck in der Richtung ON' gegen die Unterlage äußert.



§. 122. Bestimmung des Gesammtdruckes einer in Bewegung begriffenen Flüssigkeit gegen eine Röhre von sehr kleinen Querschnitten, in welcher dieselbe enthalten ist.

Es sei jetzt ABDC die in §. 97 bereits betrachtete Röhre, in welcher sich die schwere unpreßbare Flüssigkeitsmenge *abcd* herabbewegt. Es werden die Bezeichnungen jenes Paragraphs beibehalten, und indem wir die Axe EF der Röhre auf drei

rechtwinklige Koordinatenaxen beziehen, von denen die der z vertikal abwärts gekehrt ist, und die der x und y horizontal liegen, und deren gemeinschaftlicher Anfangspunkt E ist; so nennen wir außerdem noch

α, β, γ die Winkel, welche die in irgend einem Punkte ε an die Axe der Röhre gezogene Tangente resp. mit den Axen der x, der y und der z bildet,

A′, B′, C′; A″, B″, C″ die Winkel, welche die Tangente der Axe der Röhre resp. in den Punkten e und f mit denselben Koordinatenaxen bildet,

α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche die Tangente der Axe der Röhre resp. in den Querschnitten $GH=\omega_1$ und $G'H'=\omega_2$ mit jenen Koordinatenaxen bildet,

x, y, z die Koordinaten des Punktes ε,

x', y', z'; x'', y'', z'' resp. die Koordinaten der Punkte e und f,

$X=x''-x'$, $Y=y''-y'$, $Z=z''-z'$,

r den Krümmungshalbmesser der Axe der Röhre im Punkte ε,

W das Gewicht der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit,

E, F, G die Komponenten des Gesammtdruckes, welchen die Röhre auszuhalten hat, resp. in parallelen Richtungen zu den Axen der x, der y und der z.

Fassen wir eine Schicht der Flüssigkeit im Punkte ε von der ungemein kleinen Stärke $ds=vdt$ in der Richtung der Röhrenaxe ins Auge. In die Masse dieser Schicht wirken stetig zwei Kräfte: 1) die Schwere in vertikaler Richtung nach unten und 2) die Zentrifugalkraft in der Richtung des Krümmungshalbmessers am Punkte ε. (Des Einflusses der letzteren Kraft auf den hydraulischen Druck der Flüssigkeit in irgend einem Punkte ist in §. 56 Erwähnung geschehen. Bei den Untersuchungen über den Ausfluß der Flüssigkeit ist diese Kraft nicht weiter in Betracht gezogen, da sie nach der betreffenden Bemerkung in §. 56 hierauf keinen Einfluß hat; bei der nachfolgenden Untersuchung über den Gesammtdruck der Flüssigkeit auf das Gefäß ist die Berücksichtigung der Zentrifugalkraft aber besonders deshalb von Wichtigkeit, weil dieselbe zu einer Vereinfachung der Formeln führt).

Da das Volum der fraglichen Schicht ωds, also deren Masse $\mu\omega ds=\frac{w}{g}\omega ds$ ist; so ist der Druck der Schwere auf diese

Schicht, d. h. ihr Gewicht in vertikaler Richtung nach unten $w\omega ds$. Die Komponente dieses Gewichtes in der Richtung der Axe der x, sowie die in der Richtung der y ist gleich null.

Der Druck der Zentrifugalkraft auf diese Masse $\frac{w}{g}\omega ds$ in der Richtung des Krümmungshalbmessers r an dem Punkte ε ist nach bekannten Gesetzen der Mechanik $\frac{w}{g}\omega ds.\frac{v^2}{r}$. Bezeichnet man die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser r mit den Axen der x, der y und der z einschließt, mit λ, μ, ν, indem man denselben in der Richtung von dem Krümmungsmittelpunkte nach dem Punkte ε zu nimmt, in welcher Richtung auch die Zentrifugalkraft wirkt; so weiß man aus der Analysis, daß

$$\cos\lambda = -\frac{r}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{r}{ds}d(\cos\alpha),$$

$$\cos\mu = -\frac{r}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{r}{ds}d(\cos\beta),$$

$$\cos\nu = -\frac{r}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{r}{ds}d(\cos\gamma)$$

ist. Hieraus folgt für die Komponenten der auf die Schicht $\alpha\beta$ wirkenden Zentrifugalkraft in parallelen Richtungen zu den Axen der x, der y, der z resp.

$$-\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\alpha),\quad -\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\beta),\quad -\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\gamma).$$

Setzt man dem Vorstehenden zufolge in die Gleichungen (530) dE, dF, dG resp. an die Stelle von $Q_1\cos\varphi$, $Q_1\cos\psi$, $Q_1\cos\chi$, ferner $-\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\alpha)$, $-\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\beta)$, $\frac{w}{g}\omega ds - \frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\gamma)$ resp. an die Stelle von $P\cos\lambda$, $P\cos\mu$, $P\cos\nu$ und endlich $\frac{w}{g}\omega ds$ an die Stelle von m; so ergeben dieselben für die Komponenten des Druckes, welchen die elementare Schicht $\alpha\beta$ auf das Gefäß fortpflanzt,

in den Querschnitt JK=ω_2 und aus dem Querschnitte GH'=ω_3 in den Querschnitt JK'=ω_4 auf das Gefäß äußern; so geht aus der Formel (532) hervor, daß diese Ursachen z. B. bei GH einen Druck in der Richtung der Axe der Röhre hervorbringen, welcher gleich $m\frac{v_1-v_2}{dt}$ ist, oder welcher, wenn man für m die Masse $\frac{w}{g}\Omega V dt$ der in der Zeit dt durch jenen Querschnitt passirenden Flüssigkeit substituirt, und alsdann $v_1=\frac{\Omega V}{\omega_1}$, $v_2=\frac{\Omega V}{\omega_2}$ setzt, gleich

$$\frac{w}{g}\Omega V dt\,.\,\frac{v_1-v_2}{dt}=\frac{w}{g}\Omega V^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)$$

ist. Die Komponenten dieses Druckes in den Richtungen der drei Axen der x, der y und der z sind resp.

$$\frac{w}{g}\Omega V^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)\cos\alpha_1\,,\ \frac{w}{g}\Omega V^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)\cos\beta_1\,,$$
$$\frac{w}{g}\Omega V^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)\cos\gamma_1\,.$$

Bezeichnet man nun, wenn mehrere plötzliche Erweiterungen des Querschnittes, wie die bei JK, vorhanden sind, die Summe der Komponenten der hieraus entspringenden Druckkräfte in den Richtungen der drei Axen mit Σ, addirt darauf die entsprechenden Werthe zu den rechten Seiten der Gleichungen (533); so kommt

$$\left.\begin{aligned}
E=&\ -\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}X-\frac{w}{g}\Omega^2V^2\left(\frac{\cos A''}{O''}-\frac{\cos A'}{O'}\right)\\
&+\frac{w}{g}\Omega V^2\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)\cos\alpha_1\\
F=&\ -\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}Y-\frac{w}{g}\Omega^2V^2\left(\frac{\cos B''}{O''}-\frac{\cos B'}{O'}\right)\\
&+\frac{w}{g}\Omega V^2\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)\cos\beta_1\\
G=W&-\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}Z-\frac{w}{g}\Omega^2V^2\left(\frac{\cos C''}{O''}-\frac{\cos C'}{O'}\right)\\
&+\frac{w}{g}\Omega V^2\Sigma\left(\frac{\Omega}{\omega_1}-\frac{\Omega}{\omega_2}\right)\cos\gamma_1
\end{aligned}\right\}\ \ldots(534)$$

Die negativen Zeichen der in X und Y multiplizirten Glieder dürfen nicht befremden, da dieselben nur andeuten, daß z. B. für eine solche Lage der Axe der x, für welche $X = x'' - x'$ positiv ist, wie in der seitstehenden Figur, der durch $-\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}X$ dargestellte Druck nicht nach der positiven Seite Ex, sondern nach der direkt entgegengesetzten Seite xE dieser Axe gerichtet ist. Hätte man jedoch jener Axe die Richtung $E\xi$ gegeben; so würde x'' und x' negativ, also auch $x''-x'=X$ negativ, und mithin $-\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}X$ positiv sein, sodaß alsdann der hierdurch dargestellte Druck nach der positiven Seite $E\xi$ der fraglichen Axe gerichtet wäre.

§. 123. Gesammtdruck einer Flüssigkeit gegen eine Röhre, wenn die Letztere stets voll erhalten wird, und die Flüssigkeit aus derselben entströmt.

In diesem Falle sind X, Y, Z, O′ und O″ konstante Größen, und man hat die Ausflußöffnung Ω an die Stelle von O″ zu setzen.

Wenn die Röhre in dem Zustande betrachtet wird, wo der Ausfluß der Flüssigkeit beharrlich, also die Ausflußgeschwindigkeit V konstant geworden ist; so hat man $\frac{dV}{dt}=o$ zu setzen, wodurch sich Gleichungen (534) auf

liche neigt, während gleichzeitig die Geschwindigkeit in v_2 übergeht. Zur Bestimmung der Kraft Q, welche im Stande ist, diese plötzliche Veränderung hervorzubringen, bemerke man, daß das Theilchen M in der Richtung OMN' während der Zeit dt die Geschwindigkeit $v_1 - v_2 \cos\vartheta$ verliert, während dasselbe in dieser Zeit in der perpendikularer Richtung zu ON' die Geschwindigkeit $v_2 \sin\vartheta$ gewinnt. Bezeichnet man nun den Neigungswinkel OMN' mit η; so leuchtet ein, daß der zuerst erwähnte Verlust an Geschwindigkeit durch die Komponente $Q\cos\eta$ und der letztere Gewinn an Geschwindigkeit durch die Komponente $Q\sin\eta$ der Kraft Q hervorgebracht werden muß. Weil ferner jener Verlust $v_1 - v_2\cos\vartheta$ an Geschwindigkeit während der sehr kleinen Zeit dt erlangt wird, und angenommen werden kann, daß dieser Verlust gleichförmig mit der Zeit dt zugenommen habe; so kann man behaupten, die Komponente $Q\cos\eta$ müsse eine Kraft sein, welche im Stande ist, der Masse m während der Zeiteinheit bei stetiger Einwirkung auf dieselbe eine Geschwindigkeit $= \frac{v_1 - v_2\cos\vartheta}{dt}$ gleichförmig zu ertheilen. Hiernach hat man nach bekannten Gesetzen der Mechanik

$$Q\cos\eta = m \cdot \frac{v_1 - v_2\cos\vartheta}{dt},$$

und in ähnlicher Weise für die andere Komponente $Q\sin\eta$, welche während der sehr kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit $v_2\sin\vartheta$, also während der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{v_2\sin\vartheta}{dt}$ mittheilt,

$$Q\sin\eta = m \cdot \frac{v_2\sin\vartheta}{dt}.$$

Da nun Q den Widerstand bezeichnet, welchen das Theilchen M in der Richtung QM erleiden muß, während Q_1 den Druck darstellt, welchen jenes Theilchen in direkt entgegengesetz-

dem Winkel $FGH = A''$ gegen die horizontale EH neigt, überall gleichen Querschnitt Ω hat, und bei E durch einen Behälter gespeis't wird, aus welchem die Flüssigkeit mit der konstanten Geschwindigkeit V in die Röhre tritt; so sei EH die Axe der x. Alsdann hat man $O' = \Omega$ und $A' = o$, $B' = 90^o$, $C' = 90^o$, $A'' = A''$, $B'' = 90^o$, $C'' = 90^o - A''$, wodurch die erste der Gleichungen (536) für den Druck in der Richtung EH gegen die Röhre

$$E = \frac{w}{g} \Omega V^2 (1 - \cos A'')$$

ergibt. Die zweite Gleichung ergibt für den Gesammtdruck in einer horizontalen, auf der Ebene EGF perpendikular stehenden Richtung

$$F = o,$$

und aus der dritten Gleichung erhält man für den Druck in vertikaler Richtung abwärts, wenn man das Gewicht W der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit vernachlässigt,

$$G = -\frac{w}{g} \Omega V^2 \sin A'',$$

woraus folgt, daß sich die vertikale Komponente des Gesammtdruckes nicht von oben nach unten, sondern von unten nach oben äußert.

Bezeichnet man die der Geschwindigkeit V zukommende Druckhöhe mit H, sodaß

$$V = \sqrt{2gH}$$

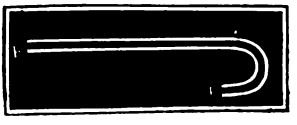
ist; so erhält man

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{w}{g} \Omega V^2 (1 - \cos A'') = 2w \Omega H (1 - \cos A'') \\ F &= o \\ G &= -\frac{w}{g} \Omega V^2 \sin A'' = -2w \Omega H \sin A'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (537)$$

Wenn der Winkel $HGF = A'' = 90^o$ ist; so reduziren sich diese Formeln auf

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{w}{g}\,\Omega V^2 = 2w\,\Omega H \\ F &= o \\ G &= -\frac{w}{g}\,\Omega V^2 = -\,2w\,\Omega H \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (538)$$

Der horizontale Druck in der Richtung EG, sowie der vertikale Druck nach oben ist alsdann gleich dem doppelten Gewichte eine Säule derselben Flüssigkeit, deren Querschnitt gleich dem der Röhre und deren Höhe gleich der Druckhöhe H ist.



Wenn der Winkel $A'' = 180^o$ ist, wo die Flüssigkeit parallel zu EG, aber in entgegengesetzter Richtung austritt; so werden die Formeln (537)

$$\left.\begin{aligned} E &= 2\,\frac{w}{g}\,\Omega V^2 = 4w\,\Omega H \\ F &= o \\ G &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (539)$$

sodaß in diesem Falle nur in horizontaler Richtung EG ein Druck ausgeübt wird, welcher noch einmal so groß ist, als der horizontale Druck in dem vorhin betrachteten Falle.

§. 124. Gesammtdruck einer aus einem Gefäße von beliebiger Gestalt entströmenden Flüssigkeit gegen dieses Gefäß.

Von einer Flüssigkeit, welche sich aus einem Gefäße von beliebiger Gestalt ergießt, kann man mit einem hohen Grade von Annäherung immer annehmen, daß die Bewegung der ganzen flüssigen Masse in lauter Fäden oder Kanälen von ungemein kleinen Querschnitten vor sich gehe. Die vorhin betrachteten Komponenten des Gesammtdruckes, welchen die Flüssigkeit gegen das Gefäß ausübt, in parallelen Richtungen zu drei rechtwinkligen Axen, werden alsdann die Summe der entsprechenden Pressungen sein, welche die Flüssigkeit in einem jeden einzelnen Faden nach jenen drei Richtungen äußert.

Schicht, d. h. ihr Gewicht in vertikaler Richtung nach unten $w\omega ds$. Die Komponente dieses Gewichtes in der Richtung der Axe der x, sowie die in der Richtung der y ist gleich null.

Der Druck der Zentrifugalkraft auf diese Masse $\frac{w}{g}\omega ds$ in der Richtung des Krümmungshalbmessers r an dem Punkte ε ist nach bekannten Gesetzen der Mechanik $\frac{w}{g}\omega ds.\frac{v^2}{r}$. Bezeichnet man die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser r mit den Axen der x, der y und der z einschließt, mit λ, μ, ν, indem man denselben in der Richtung von dem Krümmungsmittelpunkte nach dem Punkte ε zu nimmt, in welcher Richtung auch die Zentrifugalkraft wirkt; so weiß man aus der Analysis, daß

$$\cos\lambda = -\frac{r}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{r}{ds}d(\cos\alpha),$$

$$\cos\mu = -\frac{r}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{r}{ds}d(\cos\beta),$$

$$\cos\nu = -\frac{r}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{r}{ds}d(\cos\gamma)$$

ist. Hieraus folgt für die Komponenten der auf die Schicht $\alpha\beta$ wirkenden Zentrifugalkraft in parallelen Richtungen zu den Axen der x, der y, der z resp.

$$-\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\alpha),\quad -\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\beta),\quad -\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\gamma).$$

Setzt man dem Vorstehenden zufolge in die Gleichungen (530) dE, dF, dG resp. an die Stelle von $Q_1\cos\varphi$, $Q_1\cos\psi$, $Q_1\cos\chi$, ferner $-\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\alpha)$, $-\frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\beta)$, $\frac{w}{g}\omega ds - \frac{w}{g}\omega v^2 d(\cos\gamma)$ resp. an die Stelle von $P\cos\lambda$, $P\cos\mu$, $P\cos\nu$ und endlich $\frac{w}{g}\omega ds$ an die Stelle von m; so ergeben dieselben für die Komponenten des Druckes, welchen die elementare Schicht $\alpha\beta$ auf das Gefäß fortpflanzt,

$$G = W - \frac{w}{g}\Omega V^2 = W - 2w\Omega Z \quad \ldots\ldots (542)$$

In dem letzteren Falle hat also das Gefäß nur einen vertikalen Druck auszuhalten, dessen Betrag gleich dem Gewichte der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit, weniger dem doppelten Gewichte einer Flüssigkeitssäule ist, deren Querschnitt der Ausflußöffnung Ω und deren Höhe der Druckhöhe $EF = Z$ gleichkommt.

Enthielte das eben betrachtete Gefäß eine Scheidewand mit horizontaler Öffnung, für welche $\alpha_1 = 90^0$, $\beta_1 = 90^0$, $\gamma_1 = o$ wäre; so würden nach den Formeln (534) immer die horizontalen Komponenten E und F des Gesammtdruckes $= o$ bleiben, und der Werth des vertikalen Druckes G würde sich um das Glied

$$\frac{w}{g}\Omega V^2\left(\frac{\Omega}{\omega_1} - \frac{\Omega}{\omega_2}\right)$$

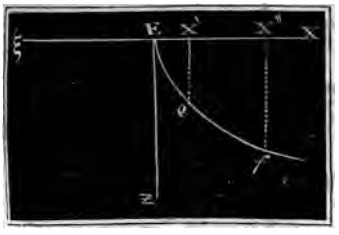
vermehren.

Im Vorstehenden ist vorausgesetzt, daß die Öffnungen Ω und ω_1 nach oben gehörig erweitert und so abgerundet seien, daß die Flüssigkeit in parallelen Fäden ohne Kontraktion durch dieselben treten könne. Ist Dies nicht der Fall; so hat man $m\Omega$ und $m_1\omega_1$ statt Ω und ω_1 zu substituiren, worin m und m_1 die entsprechenden Kontraktionskoeffizienten, also $m\Omega$ und $m_1\omega_1$ die Querschnitte der stärksten Kontraktion unterhalb jener Öffnungen bezeichnen.

Hat das Gefäß eine jede andere unregelmäßige Figur, wird dasselbe aber bis zu einer bestimmten Höhe stets voll erhalten, und ist der Beharrungszustand eingetreten; so wird es nach dem Vorhergehenden immer leicht sein, die Formeln (536) oder (535) darauf in Anwendung zu bringen. Im Allgemeinen wird man, da sich der horizontale Oberspiegel vertikal abwärts bewegt, $A' = 90^0$, $B' = 90^0$, $C' = o$ zu setzen haben, während die Winkel A″, B″, C″ von der besonderen Lage der Ebene der Ausflußöffnung abhängen.

Liegt die Ausflußöffnung Ω z. B. in einer vertikalen Wand, sodaß die Flüssigkeit in horizontaler Richtung austritt; so hat man, wenn man diese Richtung zur Axe der x annimmt, $A'' = o$, $B'' = 90^0$, $C'' = 90^0$ zu setzen, und erhält hierdurch aus den Glei-

Die negativen Zeichen der in X und Y multiplizirten Glieder dürfen nicht befremden, da dieselben nur andeuten, daß z. B.



für eine solche Lage der Axe der x, für welche $X = x'' - x'$ positiv ist, wie in der seitstehenden Figur, der durch $-\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}X$ dargestellte Druck nicht nach der positiven Seite Ex, sondern nach der direkt entgegengesetzten Seite xE dieser Axe gerichtet ist. Hätte man jedoch jener Axe die Richtung $E\xi$ gegeben; so würde x'' und x' negativ, also auch $x''-x'=X$ negativ, und mithin $-\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}X$ positiv sein, sodaß alsdann der hierdurch dargestellte Druck nach der positiven Seite $E\xi$ der fraglichen Axe gerichtet wäre.

§. 123. Gesammtdruck einer Flüssigkeit gegen eine Röhre, wenn die Letztere stets voll erhalten wird, und die Flüssigkeit aus derselben entströmt.

In diesem Falle sind X, Y, Z, O' und O'' konstante Größen, und man hat die Ausflußöffnung Ω an die Stelle von O'' zu setzen.

Wenn die Röhre in dem Zustande betrachtet wird, wo der Ausfluß der Flüssigkeit beharrlich, also die Ausflußgeschwindigkeit V konstant geworden ist; so hat man $\frac{dV}{dt}=o$ zu setzen, wodurch sich Gleichungen (534) auf

Entströmte die Flüssigkeit durch eine horizontale zylindrische Ansatzröhre von dem Querschnitte Ω; so würde man die Formeln (535) in Anwendung zu bringen haben, indem man beachtete, daß die Flüssigkeit beim Eintritte in die Röhre plötzlich von dem Querschnitte $\omega_1 = m\Omega$ zu dem Querschnitte $\omega_2 = \Omega$ übergehen müßte (vergl. §. 103). Da die Axe der Flüssigkeitsfäden beim Eintritte in die Röhre horizontal ist; so hat man $\alpha_1 = o$, $\beta_1 = 90^0$, $\gamma_1 = 90^0$ zu setzen, wodurch sich die Gleichungen (535), unter Berücksichtigung des entsprechenden Werthes von V, auf

$$\left.\begin{aligned} E &= -\frac{w}{g}\Omega V^2\left(2-\frac{1}{m}\right) = -2w\Omega Z\,\frac{2-\frac{1}{m}}{1-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2} \\ F &= o \\ G &= W+\frac{w}{g}\frac{\Omega^2V^2}{O'} = W+2w\Omega Z\,\frac{\frac{\Omega}{O'}}{1-\frac{\Omega^2}{O'^2}+\left(\frac{1}{m}-1\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad (545)$$

und wenn die Ausflußöffnung Ω im Vergleich zu dem Oberspiegel O' sehr klein ist, auf

$$\left.\begin{aligned} E &= -\frac{w}{g}\Omega V^2\left(2-\frac{1}{m}\right) = -2w\Omega Z\,\frac{m(2m-1)}{m^2+(1-m)^2} \\ F &= o, \quad G = W \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (546)$$

reduziren.

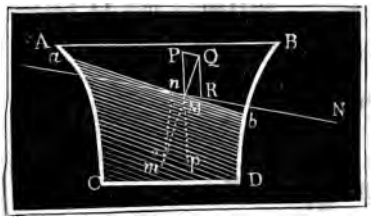
Aus dem vorstehenden Werthe für E erkennt man, daß solange $m > 0{,}5$ ist, das mit einer Ansatzröhre versehene Gefäß in horizontaler Richtung einen Druck empfängt, welcher der Richtung des Ausflusses der Flüssigkeit direkt entgegengesetzt ist. Wäre jedoch $m < 0{,}5$, also der Werth von E positiv; so würde sich dieser Druck in direkter Richtung des Ausflusses, also nach vorn, äußern.

Die wesentlichsten Resultate des vorstehenden Paragraphs sind durch verschiedene Versuche von Daniel Bernoulli und Brunacci bestätigt worden.

Gleichgewicht und Bewegung einer schweren unpreßbaren Flüssigkeit in einem bewegten Gefäße.

§. 125. Gestalt der freien Oberfläche und Druck einer schweren unpreßbarer Flüssigkeit, welche sich in einem Gefäße befindet, das mit veränderlicher Geschwindigkeit in irgend einer geradlinigen Richtung fortbewegt wird.

Das Gefäß ABDC, in welchem sich die schwere flüssige Masse *ab*DC befindet, werde in der Richtung der geraden Linie MN mit einer Geschwindigkeit fortbewegt, deren Betrag am Ende der Zeit t gleich U ist. Auf irgend ein Theilchen M dieser Flüssigkeit, dessen Masse m ist, wirkt die Schwere mit der Intensität oder mit dem Drucke mg in der Richtung PM; die in der Richtung MN wirksame Kraft, welcher die wirkliche Bewegung dieses Theilchens entspricht, ist aber $m\frac{dU}{dt}$. Bringt man also auf ein jedes Flüssigkeitstheilchen neben der Wirkung mg der Schwere in der Richtung PM noch eine Kraft $m\frac{dU}{dt}$ in einer der früheren direkt entgegengesetzten, also in der Richtung NM an, so muß hierdurch nach dem d'Alembertschen Prinzipe (§. 54) das ganze System in den Zustand des Gleichgewichts übergeführt werden.



Die Gestalt des freien Oberspiegels *ab*, sowie die Gestalten der Flächen von gleichem Niveau bei der obigen Flüssigkeit sind also durch die Bedingung zu bestimmen, daß die Flüssigkeit unter der Wirkung der beiden Kräfte $PM = mg$ und $RM = m\frac{dU}{dt}$ oder unter der Wirkung der Resultante QM aus diesen beiden Kräften, welche auf ein jedes Theilchen von der Masse m wirkt, im Gleichgewichte bleibe.

Aus §. 6 folgt nun, daß wenn das eben bezeichnete Gleichgewicht stattfinden solle, der Spiegel *ab*, sowie alle Flächen v

gleichem Niveau oder von gleichem Drucke Ebenen bilden müssen, welche auf der Richtung QM der Resultante von mg und $m\frac{dU}{dt}$ perpendikular stehen.

Um die Richtung dieser Ebenen, wie ab, zu bestimmen, sei der Winkel PMN, welchen die Richtung der Bewegung mit der nach unten verlängerten Vertikalen bildet, gleich ϑ, und der gesuchte Winkel, welchen die Ebene ab mit dem Horizonte einschließt, gleich φ; alsdann hat man, wenn man die Resultante QM der beiden Kräfte mg und $m\frac{dU}{dt}$ vorläufig mit Q bezeichnet,

$$Q\sin\varphi = m\frac{dU}{dt}\sin\vartheta,$$

$$Q\cos\varphi = mg - m\frac{dU}{dt}\cos\vartheta,$$

woraus

$$Q = m\sqrt{g^2 + \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 - 2g\frac{dU}{dt}\cos\vartheta} \qquad \ldots\ldots (547)$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{dU}{dt}\sin\vartheta}{g - \frac{dU}{dt}\cos\vartheta} \qquad \ldots\ldots (548)$$

folgt. Hieraus erkennt man, daß die beiden Größen Q und φ in Beziehung zur Zeit konstant sein werden, sobald die Geschwindigkeit U gleichförmig veränderlich ist, in welchem Falle man $\frac{dU}{dt} = \text{const.}$ hat. In solchen Fällen wird denn auch die Flüssigkeit in Beziehung zum Gefäße stets in derselben Lage bleiben.

Die Richtung der sollizitirenden Kraft ist nach §. 6 die auf ab normal stehende Linie QM, und aus Gl. (547) folgt, daß die Flüssigkeit, wenn sie in Beziehung zu dem Gefäße als ruhend gedacht wird, sich in demselben Falle befindet, als wenn alle ihre Theilchen von einer Kraft belebt wären, die im Stande ist, denselben in der Zeiteinheit nach der Richtung QM die Geschwindigkeit

$$\sqrt{g^2+\left(\frac{dU}{dt}\right)^2-2g\frac{dU}{dt}\cos\vartheta}$$

mitzutheilen.

Um den Druck p auf die Flächeneinheit zu bestimmen, welcher in irgend einem Punkte m der Flüssigkeit herrscht; so geht aus der Betrachtung des §s 121 hervor, daß die in Rede stehende Bewegung der einzelnen schweren Theilchen der Flüssigkeit, wie z. B. des bei M, nur dann stattfinden kann, wenn auf ein jedes derselben in der Richtung mM ein Widerstand gleich Q wirkt, woraus folgt, daß dasselbe in der Richtung QM mit der Kraft $Q=m\sqrt{g^2+\left(\frac{dU}{dt}\right)^2-2g\frac{dU}{dt}\cos\vartheta}$ auf die darunter liegenden Theilchen drücken wird. Da die Richtung, sowie die Größe dieser Kraft für alle Theilchen dieselbe ist; so leuchtet ein, daß die Wirkung derselben auf die Flüssigkeit ganz ähnliche Erscheinungen hervorbringen wird, wie die Wirkung der Schwere auf eine ruhende Flüssigkeit, daß man also zur Bestimmung des in der Flüssigkeit herrschenden Druckes die betreffenden Formeln des §s 9 ff. in Anwendung bringen kann, wenn man darin $\sqrt{g^2+\left(\frac{dU}{dt}\right)^2-2g\frac{dU}{dt}\cos\vartheta}$ an die Stelle von g setzt. Wenn μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und w das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet, sodaß $\mu g=w$ ist; so sind jene Formeln auch brauchbar, wenn man

$$\mu\sqrt{g^2+\left(\frac{dU}{dt}\right)^2-2g\frac{dU}{dt}\cos\vartheta}\ \text{oder}\ \mu g\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}$$

für μg d. i.

$$w\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}\ \text{für}\ w$$

an die Stelle setzt, und außerdem beachtet, daß die Richtung der sollizitirenden Kraft QM ist.

Läge demnach ein Punkt m in perpendikularer Richtung zu dem Spiegel ab um die Tiefe M$m=h$ unter der Oberfläche; so würde der daselbst stattfindende hydraulische Druck

$$p=p'+wh\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta} \quad \ldots\ldots (549)$$

sein, worin p' den auf den Spiegel ab wirkenden atmosphärischen Druck bezeichnet.

Wenn man von m aus ein Perpendikel auf die Richtung MN der Bewegung fällt, dasselbe bis zum freien Spiegel ab der Flüssigkeit verlängert und seine Länge mn mit h' bezeichnet; so wird $\angle nmM=\vartheta+\varphi-90°$, also

$$h=h'\cos(\vartheta+\varphi-90°)=h'\sin(\vartheta+\varphi)=h'(\sin\vartheta\cos\varphi+\cos\vartheta\sin\varphi).$$

Da nun nach den obigen Beziehungen

$$\cos\varphi=\frac{1-\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\cos\vartheta}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}}$$

und

$$\sin\varphi=\frac{\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\sin\vartheta}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}}$$

ist; so folgt

$$h=\frac{h'\sin\vartheta}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}},$$

also auch nach Gl. (549)

$$p=p'+wh'\sin\vartheta \quad \ldots\ldots (550)$$

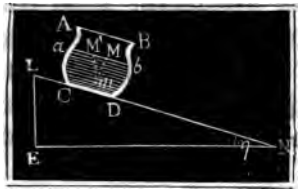
Der Gesammtdruck, welchen die ganze im Gefäße enthaltene Flüssigkeit gegen das Gefäß ausübt, wird sich in einer zu QM parallelen Richtung äußern und durch den Schwerpunkt der ganzen Masse gehen. Bezeichnet man die Masse der gesammten Flüssigkeit mit M und deren Gewicht mit W; so leuchtet ein, daß der eben erwähnte Gesammtdruck

$$Mg\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}$$

$$=W\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta} \quad \ldots\ldots (551)$$

ist.

Glitte z. B. das Gefäß **ABDC** auf der absolut glatten Ebene **LN**, welche sich unter dem Winkel $LNE=\eta$ gegen den Horizont neigt, herab; so würde man



$$U=gt\sin\eta, \text{ also } \frac{dU}{dt}=g\sin\eta$$

und außerdem $\vartheta=90^0-\eta$ haben. Dies ergibt nach Gl. (548) für den Neigungswinkel der freien Oberfläche ab der Flüssigkeit gegen den Horizont

$$\varphi=\eta,$$

woraus folgt, daß sich der Spiegel der Flüssigkeit parallel zu der geneigten Ebene **LN** stellen wird.

Für den hydraulischen Druck p in einem Punkte m der Flüssigkeit, welcher in dem Abstande $Mm=h$ von dem Spiegel ab liegt, hat man nach Gl. (549)

$$p=p'+wh\cos\eta.$$

Der Gesammtdruck der Flüssigkeit, welcher sich in normaler Richtung gegen die Ebene **LN** äußert, ist nach der Formel (551)

$$W\cos\eta,$$

wie Dies auch der Fall sein würde, wenn ein starrer Körper vom Gewichte W auf derselben Ebene herabglitte.

Würde das Gefäß in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit U fortgetrieben; so hätte man in den früheren Formeln $\vartheta=90^0$ zu setzen, wodurch sich dieselben auf die folgenden reduzirten

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{g}\frac{dU}{dt},$$

$$p = p' + wh\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2}$$

oder

$$p = p' + wh'.$$

Aus der letzteren Gleichung erkennt man, daß in diesem Falle der in irgend einem Punkte herrschende hydraulische Druck dem hydrostatischen Drucke entspricht, welcher bei einer vertikalen Tiefe $mM' = h'$ unter der Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit stattfinden würde. Der Gesammtdruck auf das Gefäß in einer auf dem Oberspiegel perpendikular stehenden Richtung würde nach der Formel (551)

$$W\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2}$$

sein.

Wenn das Gefäß mit der Geschwindigkeit U in vertikaler Richtung aufwärts bewegt wird; so hat man $\vartheta = 180^o$, mithin

$$tang\,\varphi = o \qquad \text{oder} \quad \varphi = o,$$

sodaß alsdann der freie Oberspiegel der Flüssigkeit horizontal bleibt. Der hydraulische Druck in der Tiefe h unter der Oberfläche wird jedoch nach Gl. (549)

$$p = p' + wh\left(1+\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right),$$

und man hat für den Gesammtdruck gegen das Gefäß in vertikaler Richtung nach unten

$$W\left(1+\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right).$$

Wäre die Bewegung des Gefäßes vertikal abwärts gerichtet, sodaß $\vartheta = o$ wäre; so hätte man ebenfalls

$$\operatorname{tang}\varphi = o, \qquad \text{also} \quad \varphi = o,$$

sodaß auch hier der Spiegel der Flüssigkeit horizontal bliebe.

Der hydrauliſche Druck in der Tiefe h unter der Oberfläche würde

$$p = p' + wh\left(1 - \frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right),$$

und der Geſammtdruck gegen das Gefäß in vertikaler Richtung abwärts würde

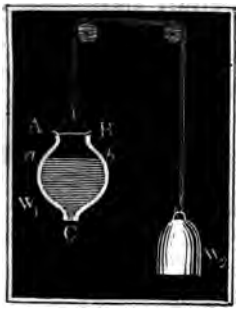
$$W\left(1 - \frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)$$

ſein.

Wenn bei der letzteren Bewegung $\frac{dU}{dt} = g$ oder $U = gt$ + const. wäre, d. h. wenn das Gefäß mitſammt der Flüſſigkeit durch die Wirkung der Schwere frei herabfiele; ſo würde

$$p = p'$$

und der Geſammtdruck der Flüſſigkeit gegen das Gefäß $= o$ ſein, wie man a priori einſehen konnte.



Die letzteren vertikalen Bewegungen würden ſich herausſtellen, wenn das Gefäß ABC vermittelſt eines über Rollen geleiteten Fadens mit einem frei herabhängenden ſchweren Körper verbunden wäre.

Unter Vernachläſſigung der Steifigkeit und des Gewichtes des Fadens, ſowie der Reibung an den Zapfen der Rollen ſei

W, wie vorhin, das Gewicht der im Gefäße enthaltenen Flüſſigkeit,

W_1 das Gewicht dieſer Flüſſigkeit mitſammt dem Gefäße,

W_2 das Gewicht des am anderen Ende befeſtigten Körpers.

U die Geſchwindigkeit des Gefäßes oder des letzteren Körpers am Ende der Zeit t.

Die lebende Kraft des ganzen Syſtemes am Ende der Zeit t iſt $\frac{W_1 + W_2}{g} U^2$, alſo die lebende Kraft, welche das Syſtem

in der Zeit dt gewinnt, $\frac{d}{dt}\left(\frac{W_1+W_2}{g}U^2\right).dt=2UdU\frac{W_1+W_2}{g}$. Die während derselben Zeit von der Schwere verrichtete Arbeit ist aber $\pm(W_2-W_1)Udt$, jenachdem $W_2>$ oder $<W_1$ ist, also die Bewegung des Gefäßes aufwärts oder abwärts erfolgt, da während dieser Zeit ein jedes der beiden Gewichte den Raum Udt durchläuft. Nach dem Prinzipe der lebenden Kräfte, §. 54, hat man also

$$UdU\,\frac{W_1+W_2}{g}=\pm(W_2-W_1)Udt$$

oder

$$\frac{dU}{dt}=\pm g\cdot\frac{W_2-W_1}{W_2+W_1}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{dU}{dt}$ in die Formel (549), indem man zugleich beachtet, daß gleichzeitig mit dem oberen Zeichen $W_2>W_1$, $\vartheta=180^0$, $\cos\vartheta=-1$ und mit dem unteren Zeichen $W_2<W_1$, $\vartheta=o$, $\cos\vartheta=+1$ ist; so erhält man für den in der Tiefe h unter dem horizontalen Spiegel stattfindenden Druck in allen Fällen

$$p=p'+wh\,\frac{2W_2}{W_2+W_1}.$$

Ebenso wird der Gesammtdruck gegen das Gefäß in vertikaler Richtung abwärts nach der Formel (551)

$$\frac{2W_2}{W_2+W_1}.W.$$

Wenn $W_2=o$ ist, also wenn das Gefäß ABC frei herabfällt; so ist $p=p'$ und der Gesammtdruck $=o$, ein Resultat, welches vorhin schon erhalten ist.

Wenn das Gewicht W_2 im Vergleich zu W_1 ungemein groß ist, sodaß man die letztere Größe gegen die erstere vernachlässigen kann; so hat man $p=p'+2wh$ und für den Gesammtdruck der Flüssigkeit den Werth $2W$. Das Gefäß bewegt sich alsdann aufwärts, indem es in jeder Sekunde die Geschwindigkeit $\frac{dU}{dt}=g$ erlangt.

Da sich auf die Massentheilchen der Gefäßwände, was den Gesammtdruck dieser Wände nach unten betrifft, ganz dieselbe Betrachtung anwenden läßt, wie sie vorhin bei den Massentheilchen der in dem Gefäße enthaltenen Flüssigkeit zur Anwendung gekommen ist; so leuchtet ein, daß die Masse des Gefäßes mitsammt der Flüssigkeit einen Druck gleich

$$\frac{2\,W_2\,W_1}{W_2+W_1}$$

vertikal nach unten ausüben, daß mithin der Faden, an welchem das Gefäß hängt, mit einer diesem Drucke gleichen Kraft gespannt sein wird.

Endlich wird noch bemerkt, daß wenn die geradlinige Bewegung U des Gefäßes, in welcher Richtung sie auch erfolge, gleichförmig ist, diese Bewegung weder auf die Gestalt und Richtung der freien Oberfläche, noch auf die inneren Pressungen, noch auf den Gesammtdruck gegen das Gefäß Einfluß hat, indem alsdann $\frac{dU}{dt}=o$, folglich

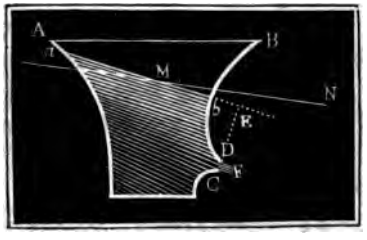
$$\text{tang}\,\varphi=o,\ \varphi=o$$

$$p=p'+wh$$

und der Gesammtdruck $=W$

wird. Dieses Resultat war vorauszusehen, da eine gleichförmige Bewegung eines Körpers durchaus nicht von der Anwesenheit einer fremden bewegenden Kraft zeugt, und einem Zustande des Gleichgewichtes entspricht.

§. 126. **Ausfluß aus einem Gefäße, welches mit veränderlicher Geschwindigkeit in einer geraden Linie bewegt wird.**



Nehmen wir an, das im vorhergehenden Paragraphe betrachtete Gefäß besitze eine Ausflußöffnung CD, aus welcher die Flüssigkeit entströmen

kann. Ist nun ab der nach jenem Paragraphe bestimmte freie Oberspiegel der Flüssigkeit; so hat man gesehen, daß ein jedes Massentheilchen in einer auf ab perpendikular stehenden Richtung dergestalt drückt, wie wenn es von einer Kraft beseelt wäre, welche im Stande ist, der Materie in der genannten Richtung und in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit

$$g\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}$$

mitzutheilen.

Hiernach würde man die in den früheren Paragraphen dieses Abschnittes über die Bewegung einer Flüssigkeit in einem Gefäße angestellten Betrachtungen, sowie die daraus gefolgerten Resultate auch auf den vorliegenden Fall in Anwendung bringen können, sofern nur die Bewegung des Gefäßes gleichförmig veränderlich, also $\frac{dU}{dt}$ konstant und mithin auch die Richtung und Stärke der in die Flüssigkeit wirkenden Kraft konstant wäre. Man brauchte sich alsdann nur zu denken, die Schwere, welche bei jenen früheren Untersuchungen als die einzige bewegende Kraft angenommen wurde, ändere ihre Richtung aus der vertikalen in die auf dem Spiegel ab perpendikular stehende Linie und außerdem ihre Intensität g in $g\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}$ um, wodurch denn auch das Gewicht w der Volumeinheit der Flüssigkeit in $w\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}$ überginge.

Bezeichnet also Z den perpendikularen Abstand EF des Mittelpunktes F einer sehr kleinen Ausflußöffnung Ω von der Ebene des freien Spiegels ab, dessen Fläche gleich O′ ist; so hat man, wenn das Gefäß stets bis zum Spiegel ab voll erhalten wird, für die konstante Ausflußgeschwindigkeit V, oder wenn der Spiegel ab allmählig herabsinkt, indem das Gefäß sich leert, für die momentane Ausflußgeschwindigkeit V resp. nach den Gleichungen (302) oder (308)

$$V=\sqrt{2gZ\sqrt{1+\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)^2-2\left(\frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)\cos\vartheta}} \quad \ldots\ldots(552)$$

Es versteht sich von selbst, daß dieser Werth von V die relative Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeitstheilchen in Beziehung zu dem Gefäße darstellt, sodaß ΩV die Ausflußmenge in der Zeiteinheit ist, und daß sich die absolute Geschwindigkeit jener Theilchen in Beziehung zu dem Raume, in welchem sich das Gefäß bewegt, ergibt, wenn man die beiden Geschwindigkeiten U und V nach dem Prinzipe des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten zusammensetzt.

Für ein Gefäß, welches auf einer glatten geneigten Ebene, deren Neigungswinkel gegen den Horizont $= \eta$ ist, frei hinabgleitet, würde nach dem vorhergehenden Paragraphe $\frac{dU}{dt} = g \sin\eta$ und $\vartheta = 90^0 - \eta$, also die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{2gZ\cos\eta}$$

sein.

Wird das Gefäß in vertikaler Richtung auf- oder abwärts bewegt, in welchen Fällen der Spiegel horizontal bleibt; so hat man

$$V = \sqrt{2gZ\left(1 \pm \frac{1}{g}\frac{dU}{dt}\right)},$$

worin das obere Zeichen für die aufwärts und das untere Zeichen für die abwärts gerichtete Bewegung zu nehmen ist.

Bezeichnet auch hier W_1 das Gewicht der Flüssigkeit mit dem Gefäße und W_2 ein anderes Gewicht, welches mit dem Gefäße durch einen über Rollen geleiteten Faden verbunden ist; so kann die vorstehende Formel für beide Fälle geschrieben werden

$$V = \sqrt{2gZ\frac{2W_2}{W_2 + W_1}}.$$

Wenn $W_2 = o$ ist, oder wenn das Gefäß frei herabfällt; so ist $V = o$; es fließt alsdann keine Flüssigkeit aus.

Wenn das Gewicht W_2 gegen W_1 ungemein groß ist, sodaß letzteres gegen ersteres verschwindet; so wird $V = \sqrt{4gZ}$. Die Ausflußgeschwindigkeit in diesem Falle, wo sich das Gefäß so rasch vertikal aufwärts bewegt, daß dasselbe in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g erlangt, verhält sich zu der Ausflußge-

schwindigkeit im Zustande der Ruhe bei gleicher Druckhöhe, wie $\sqrt{2} : 1$.

Wenn die Bewegung des Gefäßes gleichförmig, also $\frac{dU}{dt} = 0$ ist; bleibt der Spiegel horizontal und die Ausflußgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{2gZ},$$

wie im Zustande der Ruhe.

§. 127. Gestalt der freien Oberfläche und Druck einer Flüssigkeit in einem Gefäße, welches mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Are gedrehet wird.

Das Gefäß **ABDC**, in welchem sich die Flüssigkeit *aGbDC* befindet, werde mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit u um die vertikale Are **EF** herumbewegt, und die gesammte Flüssigkeit nehme an dieser Bewegung Theil. Es leuchtet ein, daß sich die Flüssigkeit in dem Gefäße in einem Zustande des Gleichgewichtes befindet, welcher durch die Bedingung zu bestimmen ist, daß auf ein jedes Theilchen **M** der Flüssigkeit von der Masse m

1) in vertikaler Richtung **PM** die Schwere wirkt, welche der Materie in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit g mitzutheilen strebt;
2) in horizontaler Richtung **RM** die Zentrifugalkraft, welche aus der Bewegung des Theilchens **M** in einem Kreise vom Halbmesser **NM** hervorgeht. Bezeichnet man diesen Halbmesser **NM** oder den Abstand des Theilchens von der Umdrehungsare mit y; so ist die Geschwindigkeit dieses Theilchens in dem Umfange des fraglichen Kreises gleich uy. Nach bekannten Gesetzen der Mechanik wirkt die Zentrifugalkraft in der Richtung **RM** mit einer Intensität, welche der Ma-

terie in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit $\frac{(uy)^2}{y}=u^2y$ mitzutheilen vermag.

Stellt nun PM die Intensität g der Schwere, RM die Intensität u^2y der Zentrifugalkraft und QM die Resultante $\sqrt{g^2+(u^2y)^2}$ Beider dar; so folgt aus §. 6, daß das fragliche Gleichgewicht nur bestehen kann, wenn die Oberfläche aGb, sowie alle Flächen von gleichem Niveau, in jedem Punkte auf der Richtung QM normal stehen.

Ist daher $aGbDC$ ein vertikaler Durchschnitt der ganzen Masse, MT eine Tangente im Punkte M an der Kurve aGb und $\angle MTE=\varphi$, ferner die von G aus in der Vertikalen GE gemessene Abszisse GN des Punktes M gleich x, während $NM=y$ ist; so muß man, da $\angle QMR=MTN=\varphi$ ist,

$$\text{tang}\,\varphi=\frac{QR}{RM}=\frac{PM}{RM},$$

oder da $\text{tang}\,\varphi=\frac{dy}{dx}$, $PM=g$, $RM=u^2y$ ist,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{g}{u^2y}$$

haben. Hieraus folgt

$$y\,dy=\frac{g}{u^2}\,dx$$

und durch Integration, da gleichzeitig $x=o$, $y=o$ sein muß,

$$y^2=\frac{2g}{u^2}x \qquad \ldots\ldots (553)$$

Man sieht also, daß die freie Oberfläche und auch jede Fläche von gleichem Niveau ein Umwälzungsparaboloid darstellen wird, dessen in der Vertikalebene EFAB liegende erzeugende Parabel aGb den Parameter $\frac{2g}{u^2}$ besitzt und ihren Scheitel G in der Umdrehungsaxe EF hat.

Der in irgend einem Punkte H der Flüssigkeit herrschende Druck p auf die Flächeneinheit findet sich nach Anleitung des §s 4 leicht, wenn man von H die Vertikale $HM=z$ bis zum

freien Spiegel aGb zieht, und alsdann die Kraft QM, welche in §. 4 mit f bezeichnet ist, während daselbst auch $\angle QMP = \vartheta$ war, in ihre Komponenten $f\cos\vartheta$ und $f\sin\vartheta$ resp. parallel und perpendikular zur Richtung MH zerlegt und alsdann

$$f\cos\vartheta = PM = g$$

in Gl. (11) substituirt. Dies ergibt, wenn p' den auf der freien Oberfläche ruhenden atmosphärischen Druck bezeichnet,

$$p = p' + \int_0^z \mu g\,dz = p' + \mu g z,$$

oder da μg gleich dem Gewichte w der Volumeinheit der Flüssigkeit ist,

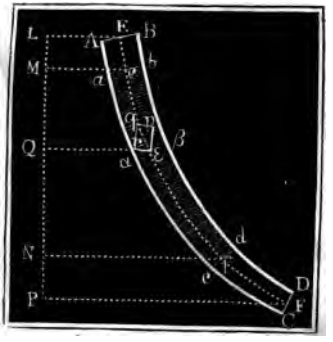
$$p = p' + wz \qquad \ldots\ (554)$$

Hieraus folgt, daß die im Punkte H herrschende Pressung dieselbe ist, welche in einer vollkommen ruhenden Flüssigkeit in der Tiefe $MH = z$ unter der horizontalen Oberfläche stattfinden würde. Es versteht sich auch hier von selbst, daß wenn vertikal über dem Punkte H der Spiegel der Flüssigkeit nicht frei ist, die Höhe z bis zu der erweiterten Oberfläche des Umwälzungsparaboloides zu rechnen ist, wovon der freie Spiegel einen gewissen Theil bildet.

Da dem Theilchen M diametral gegenüber ein anderes liegt, auf welches die Zentrifugalkraft mit derselben Stärke und in derselben geraden Linie, nur nach entgegengesetzter Seite wirkt; so folgt, daß wenn das Gefäß in Beziehung zu zwei durch die Axe EF gehenden vertikalen Ebenen symmetrisch ist, die Resultante der aus der Zentrifugalkraft hervorgehenden Pressungen auf die ganze Flüssigkeit $= o$ sein wird, sodaß sich alsdann der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen das Gefäß nur in der vertikalen Richtung der Schwere äußert und gleich dem Gewichte W der ganzen flüssigen Masse ist.

§. 128. Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem Gefäße, welches mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine vertikale Axe gedrehet wird.

Die enge Röhre **ABDC**, in welcher sich am Ende der Zeit t eine gewisse Quantität Flüssigkeit in der Lage $abdc$ befindet, werde mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit u um die vertikale Axe **LP** gedrehet. Behalten wir ganz die Bezeichnungen des §s 55 und besonders die des §s 57 bei und nennen nur noch



y den horizontalen Abstand εQ irgend eines Punktes ε der Axe der Röhre, wo der Querschnitt $\alpha\beta = \omega$ genommen ist, von der Umdrehungsaxe **LP**,

y', y'' resp. diese Abstände für die Punkte e und f, in welcher die Axe der Röhre die obere und untere Endfläche der Flüssigkeit durchschneidet. Es ist hierbei gleichgültig, ob die Axe der Röhre in einer vertikalen oder in einer anderen Ebene liegt, oder ob dieselbe vielleicht gar eine Linie doppelter Krümmung ist.

Mit Bezugnahme auf den vorhergehenden Paragraph, wirkt auf die Materie der bei $\alpha\beta$ liegenden sehr dünnen Querschicht der Flüssigkeit die Schwere in der vertikalen Richtung $p\varepsilon$ mit der Intensität g und die Zentrifugalkraft in der horizontalen Richtung $r\varepsilon$ mit der Intensität $u^2 y$. Bezeichnet man die Resultante $q\varepsilon$ aus beiden mit f und den Winkel, welchen die Letztere mit der Axe der Röhre oder mit deren Tangente im Punkte ε einschließt, mit ϑ; so hat man die in die Richtung dieser Tangente fallende Komponente $f\cos\vartheta$ in das entsprechende Glied

$$\int_{s'}^{s''} f\mu v\omega\cos\vartheta\, ds$$

der Gleichung (234) einzuführen. Bezeichnet man aber vorläufig den Neigungswinkel der Vertikalen $p\varepsilon$ gegen die fragliche Tangente mit ϑ', also den Neigungswinkel der Horizontalen $r\varepsilon$ gegen dieselbe Tangente mit $90^0 - \vartheta'$; so ist offenbar

$$(q\varepsilon)\cos\vartheta = (p\varepsilon)\cos\vartheta' + (r\varepsilon)\sin\vartheta', \text{ d. i.}$$
$$f\cos\vartheta = g\cos\vartheta' + u^2 y\sin\vartheta'.$$

Jetzt ist $\cos\vartheta' = \frac{dz}{ds}$ und $\sin\vartheta' = \frac{dy}{ds}$; mithin

$$f\cos\vartheta = g\frac{dz}{ds} + u^2 y \frac{dy}{ds}.$$

Durch Substitution dieses Werthes wird das obige Glied, weil auch $\mu = \frac{w}{g}$ ist,

$$\int_{s'}^{s''} f\mu v\omega\cos\vartheta\, ds = w\int_{z'}^{z''} v\omega\, dz + \frac{u^2 w}{g}\int_{y'}^{y''} v\omega y\, dy$$

oder da $v\omega$ konstant $= V\Omega$ ist,

$$\int_{s'}^{s''} \mu v\omega\cos\vartheta\, ds = V\Omega w\left[(z''-z') + \frac{u^2}{2g}(y''^2 - y'^2)\right].$$

Hieraus erkennt man leicht, daß die Formeln (241), (243) und die daraus gefolgerten Resultate auch für den gegenwärtigen Fall Gültigkeit behalten, wenn man statt des darin vorkommenden Gliedes $w(z''-z')$ das Glied $w\left[(z''-z') + \frac{u^2}{2g}(y''^2 - y'^2)\right]$ einschaltet. Enthielte z. B. die Röhre keine plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen, und würde auf die Reibung der Flüssigkeit an den Röhrenwänden keine Rücksicht genommen; so hätte man statt der Gl. (243)

$$p' - p'' + w\left[(z''-z') + \frac{u^2}{2g}(y''^2 - y'^2)\right] =$$

$$\frac{w}{g}\Omega\frac{dV}{dt}\int_{s'}^{s''}\frac{ds}{\omega} + \frac{w}{2g}V^2\left(\frac{\Omega^2}{O''^2} - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right) \qquad \ldots\ldots (555)$$

womit Eine der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} O'\,ds' &= \Omega V\,dt \\ O''\,ds'' &= \Omega V\,dt \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (556)$$

zu verbinden ist.

Wenn sich die Flüssigkeit aus dem untersten Querschnitte **CD** der Röhre ergießt, während der obere Spiegel stets auf konstanter Höhe **AB** erhalten wird, und wenn der Ausfluß den Zustand der Beharrlichkeit angenommen hat; so ist O′ konstant, $O''=\Omega$, $s'=o$, s'' konstant $=S$, $z'=o$, z'' konstant $=Z$, y' konstant $=Y'$, y'' konstant $=Y''$ und $\frac{dV}{dt}=o$. Hierdurch wird die vorstehende Gleichung (555)

$$p'-p''+w\left[Z+\frac{u^2}{2g}(Y''^2-Y'^2)\right]=\frac{w}{2g}V^2\left(1-\frac{\Omega^2}{O'^2}\right),$$

woraus für die Ausflußgeschwindigkeit V, mit welcher die Flüssigkeit aus dem Gefäße strömt,

$$V=\sqrt{\frac{2g\left[Z+\frac{u^2}{2g}(Y''^2-Y'^2)+\frac{p'-p''}{w}\right]}{1-\frac{\Omega^2}{O'^2}}} \quad \ldots\ldots (557)$$

folgt.

Wenn $p'=p''$ ist; so wird

$$V=\sqrt{\frac{2g\left[Z+\frac{u^2}{2g}(Y''^2-Y'^2)\right]}{1-\frac{\Omega^2}{O'^2}}} \quad \ldots\ldots (558)$$

und wenn gleichzeitig die Ausflußöffnung im Vergleich zu dem Oberspiegel O′ ungemein klein wäre,

$$V=\sqrt{2g\left[Z+\frac{u^2}{2g}(Y''^2-Y'^2)\right]} \quad \ldots\ldots (559)$$

Die vorstehenden Werthe der Ausflußgeschwindigkeit V hängen nur von dem vertikalen Abstande Z der beiden Endpunkte der Röhrenaxe und von den Abständen Y′ und Y″ dieser beiden Punkte von der vertikalen Umdrehungsaxe, sonst aber durchaus nicht von der übrigen Gestalt der Röhre ab. Ist nun **ABF** ein Gefäß von ganz beliebiger Gestalt, mit

einer im Vergleich zu dem oberen Querschnitte sehr kleinen Ausflußöffnung CD, aus welcher sich die im Gefäße befindliche und stets auf der Höhe AGB erhaltene Flüssigkeit ergießt; so wird, wenn dieses Gefäß mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit u um die vertikale Axe EF gedrehet wird, zuvörderst der Spiegel AGB sehr nahe die Form des im vorigen Paragraph beschriebenen Umwälzungsparaboloids annehmen.

Denkt man sich jetzt, die im Beharrungszustande begriffene Flüssigkeit ergieße sich in lauter Fäden von ungemein kleinen Dimensionen; so sei MN irgend Einer dieser Fäden. Der vertikale Abstand der beiden Endpunkte M und N sei z und die horizontalen Abstände dieser beiden Punkte von der Umdrehungsaxe EF seien resp. y' und y''; ferner sei der vertikale Abstand der beiden Punkte G und N gleich Z.

Nach Gl. (553) hat man hier

$$y'^2 = \frac{2g}{u^2}(z - Z) \text{ oder}$$

$$z - \frac{u^2}{2g} y'^2 = Z;$$

mithin auch

$$z + \frac{u^2}{2g}(y''^2 - y'^2) = Z + \frac{u^2}{2g} y''^2.$$

Hiernach wird die Geschwindigkeit der Theilchen des Fadens MN bei N, welche nach Gl. (559)

$$V = \sqrt{2g\left[z + \frac{u^2}{2g}(y''^2 - y'^2)\right]}$$

sein würde,

$$V = \sqrt{2g\left(Z + \frac{u^2}{2g} y''^2\right)}.$$

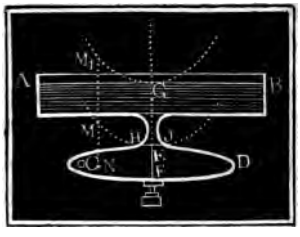
Diese Geschwindigkeit variirt also für die verschiedenen Fäden MN nur insofern, als für dieselben der unterste Endpunkt N nicht derselbe ist, und nach und nach alle verschiedenen Örter der Ausflußöffnung CD annehmen kann. Wenn jedoch diese Öffnung nicht zu nahe unter dem oberen Spiegel der Flüssigkeit

liegt; so kann man ohne bemerkbaren Fehler für Z den vertikalen Abstand des Mittelpunktes von CD unter dem Punkte G und für y'' den horizontalen Abstand Y desselben Mittelpunktes der Umdrehungsaxe EF substituiren, und alsdann für die allen Theilchen der Flüssigkeit in der Ausflußöffnung zukommende relative Ausflußgeschwindigkeit

$$V=\sqrt{2g\left(Z+\frac{u^2}{2g}Y^2\right)} \qquad \ldots\ldots (560)$$

setzen.

Wäre der Oberspiegel des um eine vertikale Axe EF gedreheten Gefäßes ECFD nicht frei, sondern das ganze Gefäß gefüllt, indem die Flüssigkeit z. B. aus einem darüber stehenden Behälter ABJH in das untere Gefäß geleitet würde; so hätte man offenbar für die Ausflußgeschwindigkeit durch die Öffnung bei C die Formel



$$V=\sqrt{2g\left(Z+\frac{u^2}{2g}Y^2+\frac{p'-p''}{w}\right)}$$

in Anwendung zu bringen, worin Z die Tiefe der Öffnung C unter dem höchsten Punkte E der Umdrehungsaxe im Gefäße, Y den horizontalen Abstand der Öffnung C von der letzteren Axe, p' den im Punkte E stattfindenden hydraulischen Druck auf die Flächeneinheit und p'' den äußeren atmosphärischen Druck, welcher gegen die Ausflußöffnung wirkt, bezeichnet. Setzt man aber die Höhe EG des Spiegels im oberen Behälter über dem Punkte E gleich Z_1, und beachtet, daß auch auf dem Spiegel AB der atmosphärische Druck p'' ruhet; so ist $p'=p''+wZ_1$, also $\frac{p'-p''}{w}=Z_1$, folglich die relative Ausflußgeschwindigkeit bei C

$$V=\sqrt{2g\left(Z+Z_1+\frac{u^2}{2g}Y^2\right)} \qquad \ldots\ldots (561)$$

Wenn die Ausflußöffnung C bei der letzteren Anordnung gar nicht vorhanden wäre, und man dächte sich ein Umwälzungs-

$$MR:RQ=MC:CD, \text{ d. i.}$$
$$u^2r:g=r:x;$$

so folgt

$$x=\frac{g}{u^2} \qquad \ldots . \ (563)$$

Aus diesem Ausdrucke für x, welcher von dem Abstande $MC=r$ des Theilchens M von der Umdrehungsaxe ganz unabhängig und für alle Theilchen in allen Lagen des Gefäßes konstant ist, folgt, daß die Kurve aMb ein Kreisbogen sein wird, dessen Mittelpunkt D um $x=\frac{g}{u^2}$ über der horizontalen Umdrehungsaxe C liegt, daß ferner die Durchschnitte der verschiedenen Flächen von gleichem Niveau mit der Vertikalebene CMD in den verschiedensten Lagen des Gefäßes, welche dasselbe nachundnach durchläuft, konzentrische Kreise, wie aMb, bilden werden, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt D ist. Die fraglichen Flächen selbst bilden hiernach zylindrische Oberflächen, deren gemeinschaftliche Axe durch D geht und horizontal liegt.

Diese Betrachtung lehrt unter Anderem die Gestalt der Oberfläche kennen, welche das Wasser in den Schaufeln eines oberschlächtigen Wasserrades annimmt.

Die Gleichung (563) zeigt, daß x desto kleiner wird, daß also der Punkt D umso weiter herunterrückt, je größer die Umdrehungsgeschwindigkeit u des Gefäßes um die Axe C wird. Man erkennt, daß solange D in einer gewissen Höhe über der höchsten Lage $a'A'b'$ des Gefäßes liegt, der Spiegel der Flüssigkeit in allen Lagen des Gefäßes nach oben konkav ist, daß jedoch, wenn D zu weit herabkommt, z. B. wenn er zwischen A' und C fiele, der freie Spiegel in allen Lagen des Gefäßes, vom Punkte C aus gesehen, konkav sein müßte. Wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit so groß ist, daß dieser Fall eintritt; so wird die Flüssigkeit vermöge der überhand nehmenden Zentrifugalkraft selbst in der höchsten Lage des Gefäßes gegen die der Axe C entgegengesetzte Gefäßwand gepreßt. Wäre das Gefäß an dieser Seite offen; so würde die Flüssigkeit selbst in der höchsten Lage $a'A'b'$ aus dem Gefäße hinausgeschleudert werden. Wäre das Gefäß dagegen an der erwähnten, dem Punkte C abgekehrten Seite geschlossen; so würde die Flüssigkeit nicht aus demselben herausfallen, selbst wenn dasselbe an der dem Punkte C zugekehrten Seite eine Öffnung hätte.

Der Ort des Punktes D in der Vertikalen CD, für welchen der Spiegel $a'b'$ der Flüssigkeit in der obersten Lage des Gefäßes aufhört, nach oben konkav zu sein, und der Ort, für welchen jener Spiegel anfängt, nach unten konkav zu werden, hängt offenbar von der besonderen Gestalt des Gefäßes und der Menge der darin enthaltenen Flüssigkeit ab. Wenn die letzteren

beiden Größen gegeben sind; so muß durch eine geometrische Betrachtung zuvörderst der niedrigste Punkt D′ ermittelt werden, durch welchen möglicherweise noch die horizontale Axe eines Zylinders gehen kann, welcher mit seiner unteren Seite einen bestimmten, von der Flüssigkeit einzunehmenden Raum von dem gegebenen Gefäße abschneidet. Wenn $CD'=R'$ ist; so wird die Flüssigkeit aufhören, bei der höchsten Lage des Gefäßes nur den unteren Theil desselben einzunehmen, sobald die Umdrehungsgeschwindigkeit u nach Gl. (563)

$$u>\sqrt{\frac{g}{R'}}$$

wird.

Hat man hierauf den höchsten Punkt D″ ermittelt, durch welchen möglicherweise noch die horizontale Axe eines Zylinders gehen kann, welcher mit seiner oberen Seite einen bestimmten, von der Flüssigkeit einzunehmenden Raum von dem gegebenen Gefäße abschneidet; so wird, wenn $CD''=R''$ ist, bei einer Winkelgeschwindigkeit von

$$u>\sqrt{\frac{g}{R''}}$$

die gesammte Flüssigkeit jedenfalls ganz und gar bei der höchsten Lage des Gefäßes gegen die obere Seite desselben gepreßt werden.

Für Umdrehungsgeschwindigkeiten, welche $>\sqrt{\frac{g}{R'}}$, aber $<\sqrt{\frac{g}{R''}}$ sind, wird Ein Theil der Flüssigkeit gegen die obere Seite und Ein Theil gegen die untere Seite des Gefäßes in dessen höchster Lage gepreßt werden. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, daß der Punkt D″ unter dem Punkte D′ liegt, ein Fall, der dann gewöhnlich eintritt, wenn die Flüssigkeit mehr, als die Hälfte des Gefäßes einnimmt.

Läge D″ über D′, ein Fall, der ebenso möglich ist, und besonders dann eintritt, wenn die Flüssigkeit weniger, als die Hälfte des Gefäßes ausfüllt; so kann für Umdrehungsgeschwindigkeiten, welche $>\sqrt{\frac{g}{R''}}$, aber $<\sqrt{\frac{g}{R'}}$ sind, die Flüssigkeit nicht bloß zum Theil gegen die obere und zum Theil gegen die untere Seite des Gefäßes gepreßt werden, sondern sie kann auch entweder ganz und gar gegen die obere oder ganz und gar gegen die untere Seite des Gefäßes gedrückt werden.

Wäre das Gefäß z. B. ein rechtwinkliges Parallelepipedum ABFE von der Breite $EF=a$ und der Höhe $EA=b$, dessen Mittelpunkt G um $GC=R$ von der horizontalen Umdrehungsaxe absteht und von welchem das $n$fache seines Volums durch die Flüs-

sigkeit eingenommen wird; so wird der Radius der Zylinderfläche, welche die Flüssigkeit begränzen soll, nie kleiner sein können, als $\frac{a}{2}$, weil alsdann der halbkreisförmige Spiegel $a'c'b'$ oder $a''c''b''$ der Flüssigkeit die Seitenwände EA und FB des Gefäßes berührt. Hiernach findet man leicht, wenn man beachtet, daß die Fläche $Ea'c'b'F$ oder $Aa''c''b''B = nab$ sein muß,

$$CD' = R' = R + \frac{\pi}{4}a + \left(n - \frac{1}{2}\right)b,$$

$$CD'' = R'' = R - \frac{\pi}{4}a - \left(n - \frac{1}{2}\right)b.$$

Ist nun $\frac{\pi}{4}a + nb > \frac{b}{2}$, also $R' > R''$; so wird die Flüssigkeit unbedingt den unteren Theil des Gefäßes in dessen höchster Lage füllen, wenn

$$u < \sqrt{\frac{g}{R + \frac{\pi}{4}a + \left(n - \frac{1}{2}\right)b}}$$

ist, und unbedingt den oberen Theil, wenn

$$u > \sqrt{\frac{g}{R - \frac{\pi}{4}a - \left(n - \frac{1}{2}\right)b}}$$

ist.

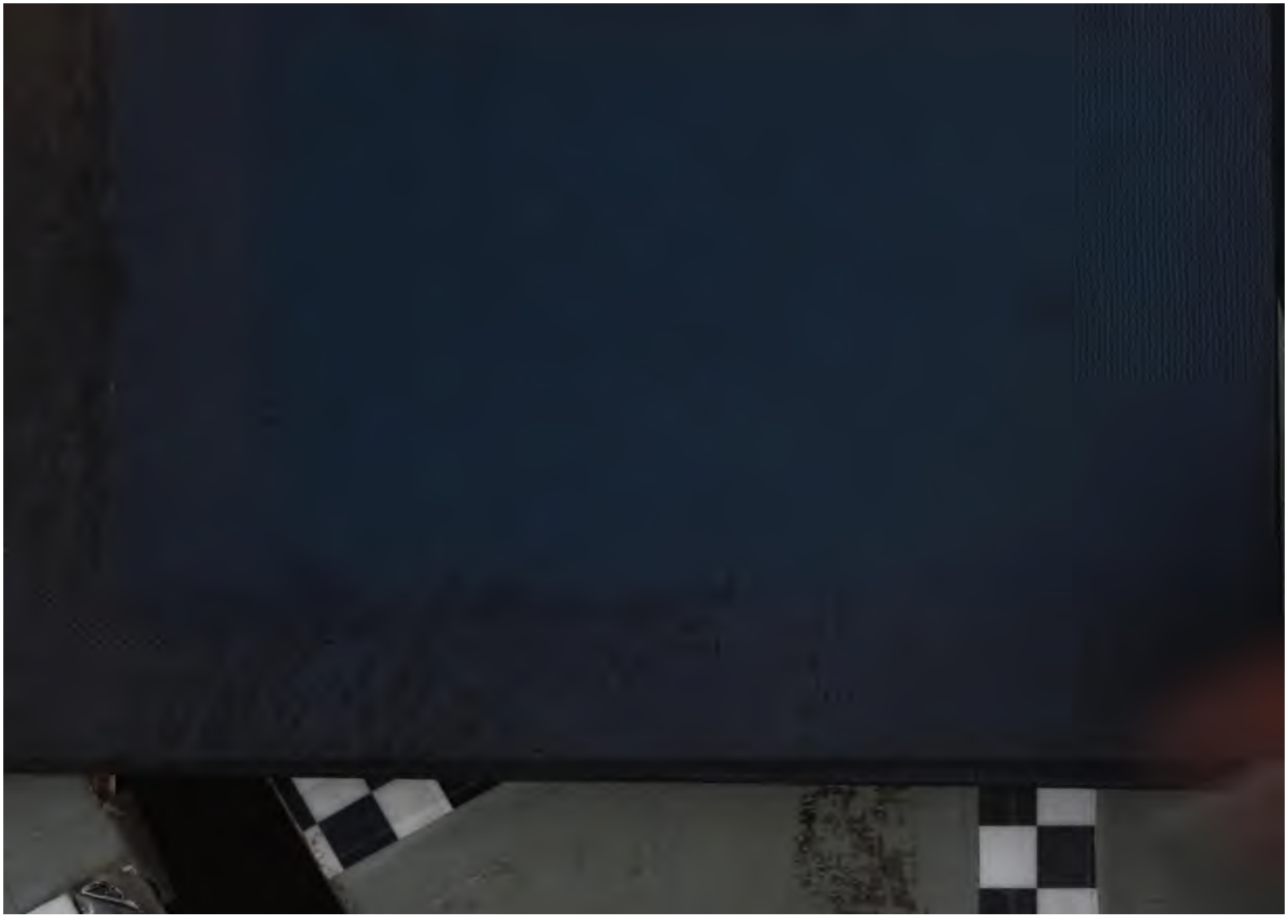
Wäre dagegen $\frac{\pi}{4}a + nb < \frac{b}{2}$, also $R'' > R'$; so wird die Flüssigkeit unbedingt den unteren Theil des Gefäßes in dessen höchster Lage füllen, wenn

$$u < \sqrt{\frac{g}{R - \frac{\pi}{4}a + \left(\frac{1}{2} - n\right)b}}$$

ist, und unbedingt den oberen Theil, wenn

$$u > \sqrt{\frac{g}{R + \frac{\pi}{4}a - \left(\frac{1}{2} - n\right)b}}$$

ist.

Bei den beiden größeren Werthen von u würde also die Flüssigkeit nicht aus dem Gefäße herausfallen, selbst wenn das Letztere bei EF gar keinen Boden besäße.

Ende des ersten Theiles.